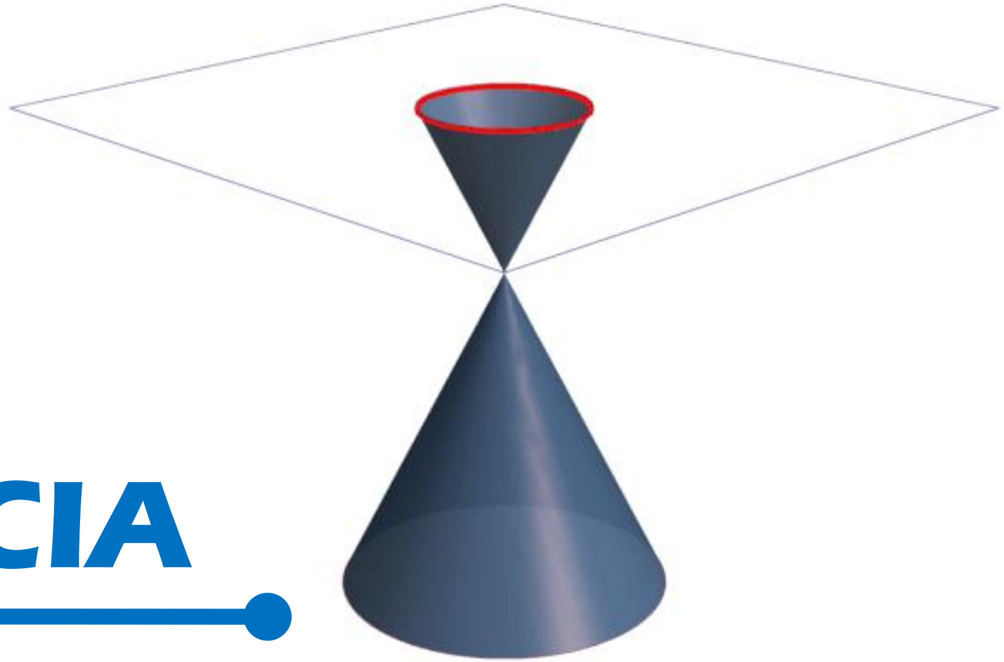
Profesor:
Jonathan Cumpa Velásquez

TRIGONOMETRÍA

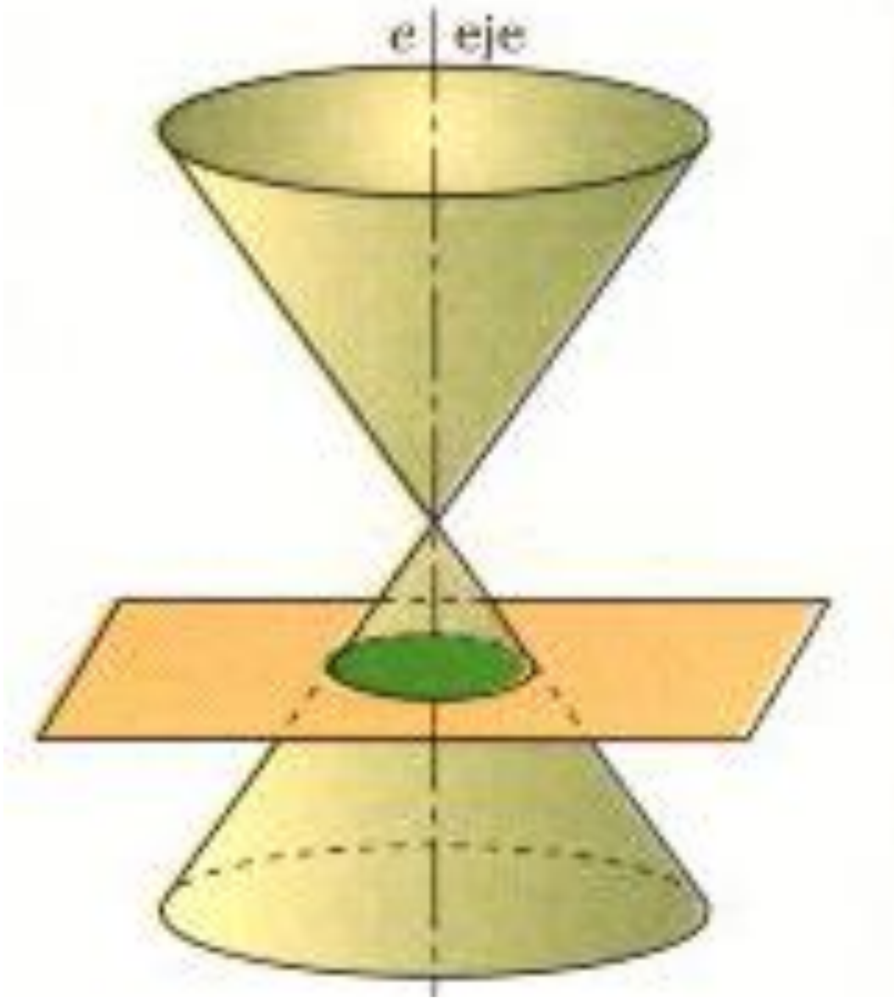
GRUPO PITÁGORAS

CÓNICAS



CIRCUNFERENCIA

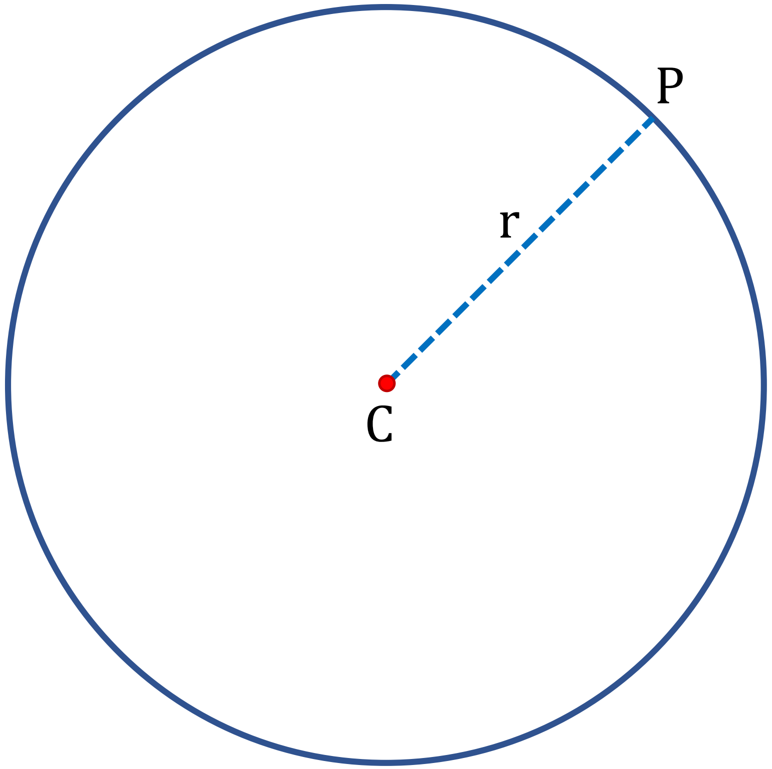
CIRCUNFERENCIA



CIRCUNFERENCIA

1. DEFINICIÓN:

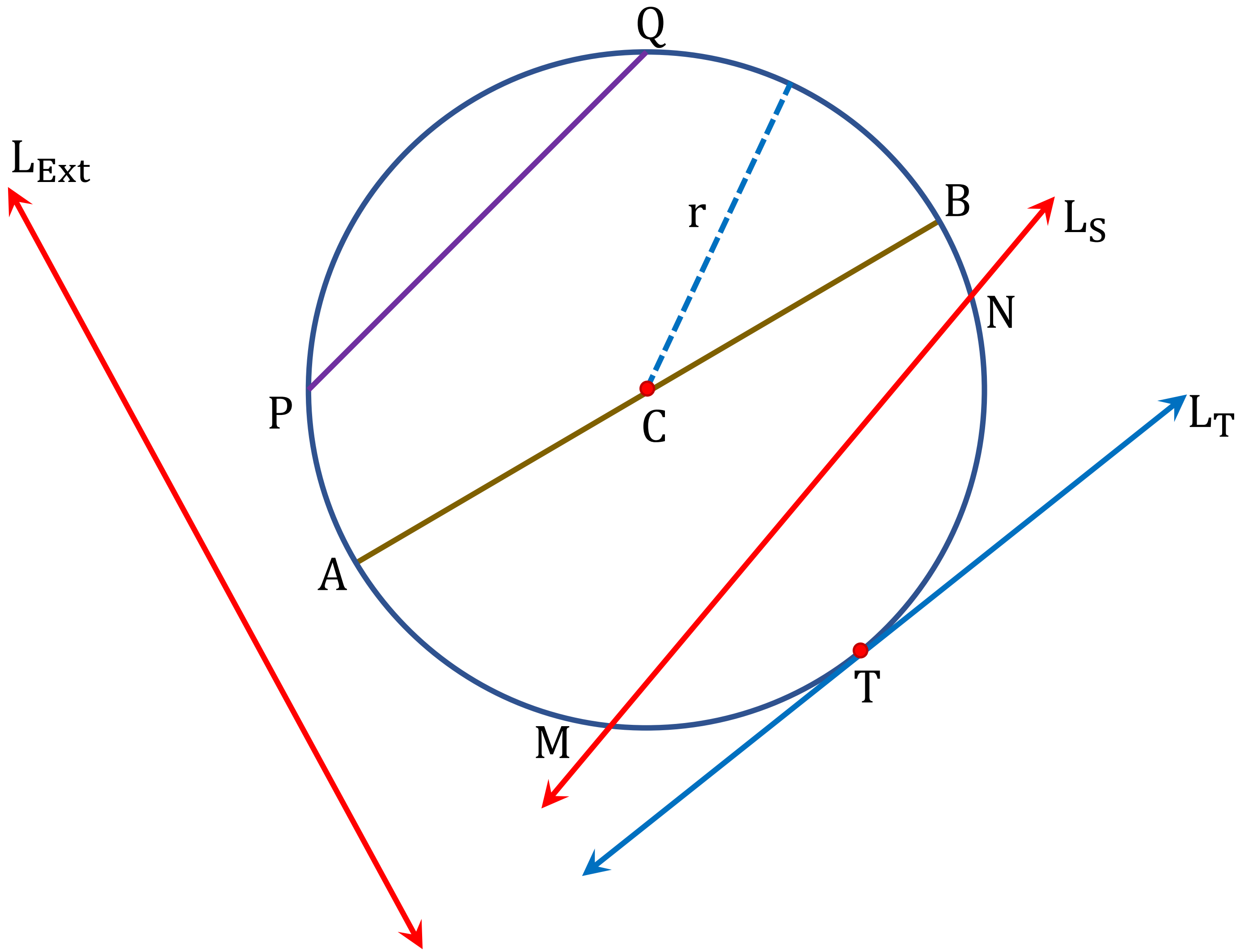
Una circunferencia es aquel lugar geométrico de todos los puntos que pertenecen a un mismo plano tal que equidistan de un punto fijo. Al punto fijo se le denomina centro y a la distancia constante se le llama radio.



$$\boxed{d\overline{PC} = cte}$$

PC=r

2. ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA



C: Centro

r: Radio

$\overline{PQ}$: Cuerda

$\overline{AB}$: Diámetro $= 2r$

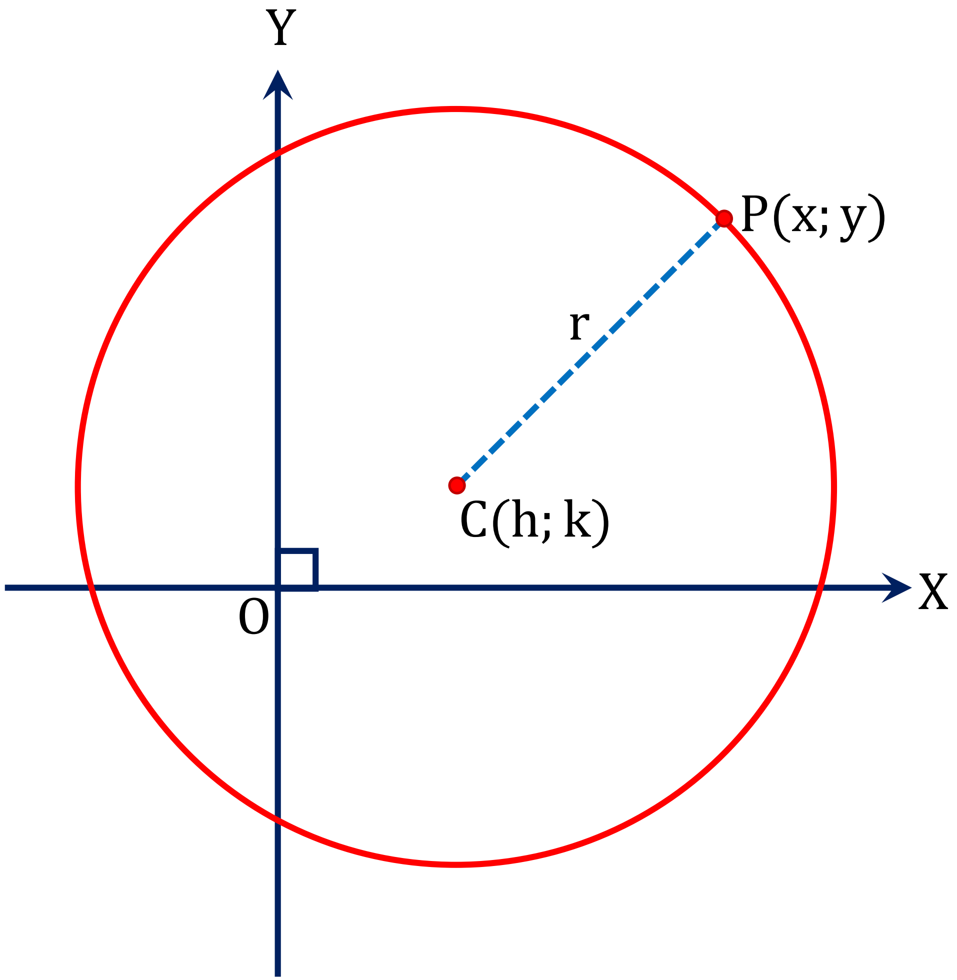
$\overleftrightarrow{L_T}$: Recta Tangente

$\overleftrightarrow{L_S}$: Recta Secante

$\overleftrightarrow{L_E}$: Recta Exterior

3.ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA:

3.1.ECUACIÓN ORDINARIA: **Centro en $\mathbf{C(h;k)}$**

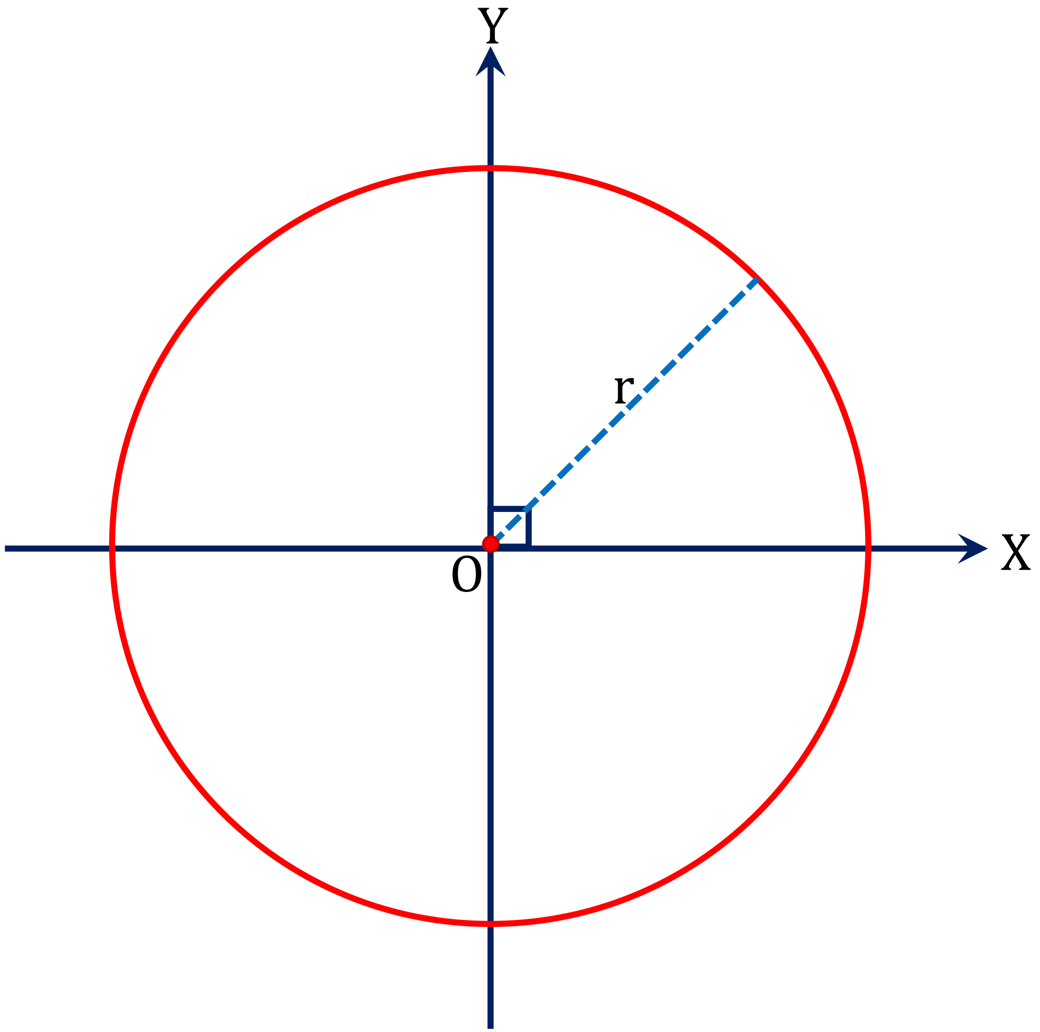


$$\boxed{\mathcal{C}: (\mathbf{x}-\mathbf{h})^2 + (\mathbf{y}-\mathbf{k})^2 = \mathbf{r}^2}$$

Centro: $C(h;k)$

Radio: r

3.2.ECUACIÓN CANÓNICA: Centro en $\mathbf{O(0;0)}$



$$\mathcal{C}: \mathbf{x}^2 + y^2 = \mathbf{r}^2$$

Radio: r

3.3.ECUACIÓN GENERAL:

$$\mathcal{C}: \mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

$$\text{Centro: } \left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

❖ EJEMPLOS:

1. La ecuación general de una circunferencia es: $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 = 0$

Entonces se deduce:

$$\text{Centro: } \left(-\frac{2}{2}; -\frac{-10}{2}\right) \longrightarrow \text{Centro: } (-1; 5)$$

$$\text{Radio: } \sqrt{\frac{(-10)^2 + 2^2 - 4(17)}{4}} \longrightarrow \text{Radio} = 3$$

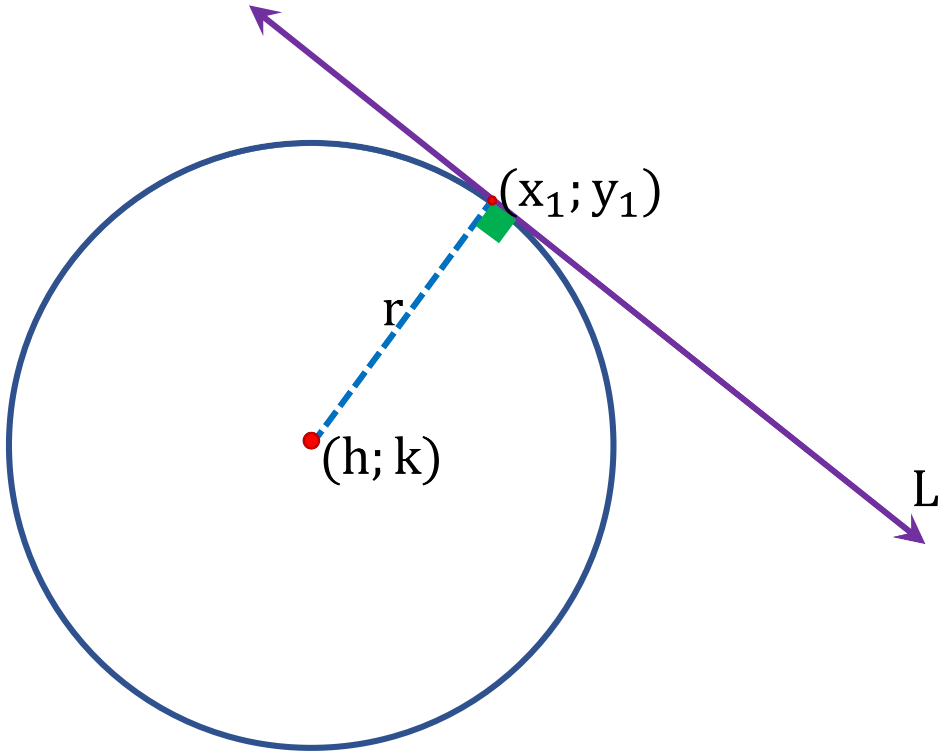
2. La ecuación general de una circunferencia es: $2x^2 + 2y^2 - 5x + 4y - 7 = 0$

Se deduce: $x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + 2y - \frac{7}{2} = 0$

$$\text{Centro: } \left(-\frac{-\frac{5}{2}}{2}; -\frac{2}{2}\right) \longrightarrow \text{Centro: } \left(\frac{5}{4}; -1\right)$$

$$\text{Radio: } \sqrt{\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 - 4\left(-\frac{7}{2}\right)}{4}} \longrightarrow \text{Radio} = \frac{\sqrt{97}}{4}$$

4. ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA:



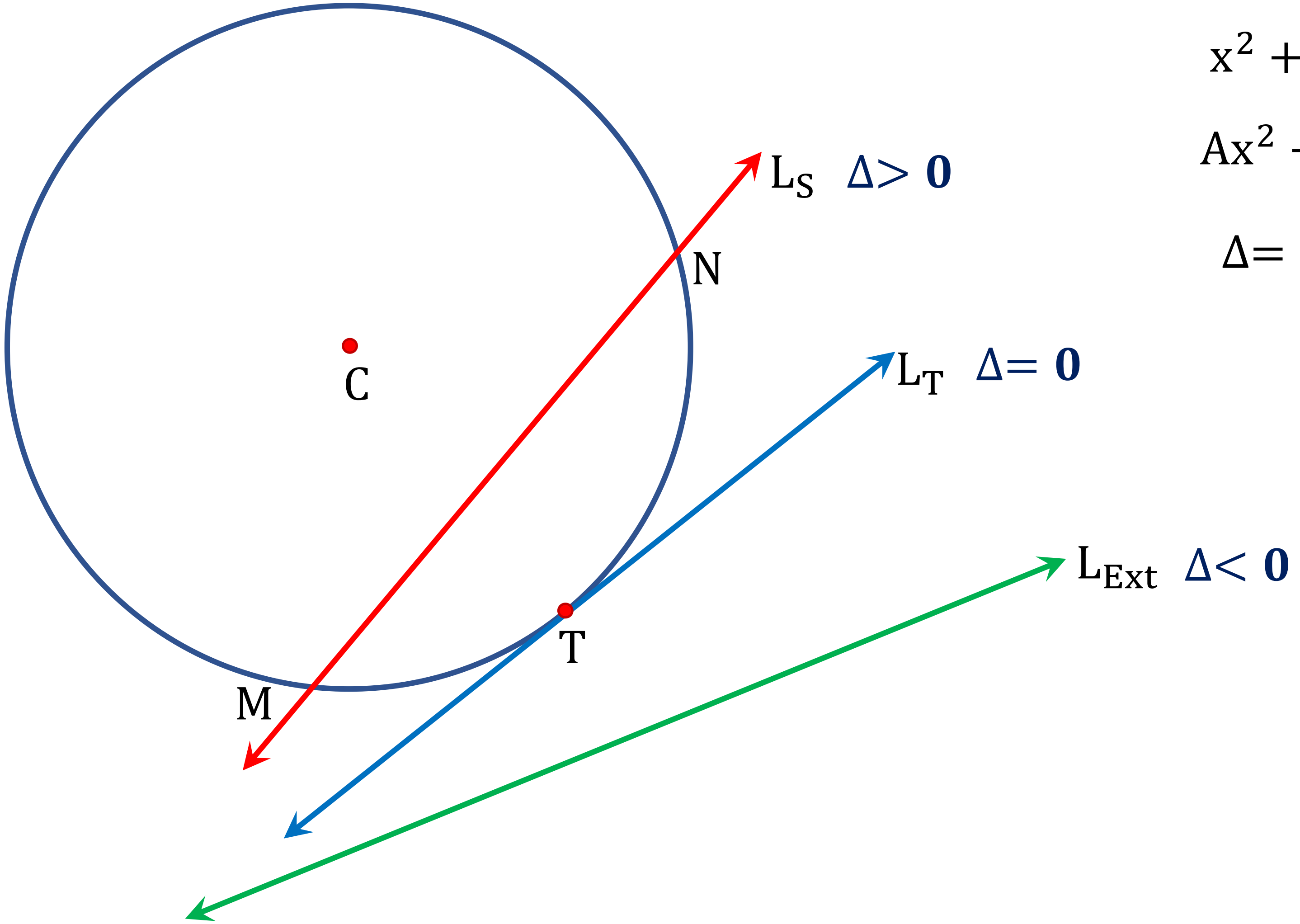
Sea $(x_1; y_1)$ el punto de tangencia de la recta L y la circunferencia

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

La ecuación de la recta $\overleftrightarrow{L}$ es:

$$\boxed{\mathbf{x_1 x + y_1 y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0}}$$

5. OBSERVACIÓN: Sea $\mathcal{C}: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ y la $\mathcal{L}: y=mx+b$



$$x^2+(mx+b)^2+Dx+E(mx+b)+F=0$$

$$Ax^2+Bx+C=0$$

$$\Delta = B^2-4AC$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

CIRCUNFERENCIA

1. Se tiene la circunferencia: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$, y el punto (3;3).Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia trazada por dicho punto.

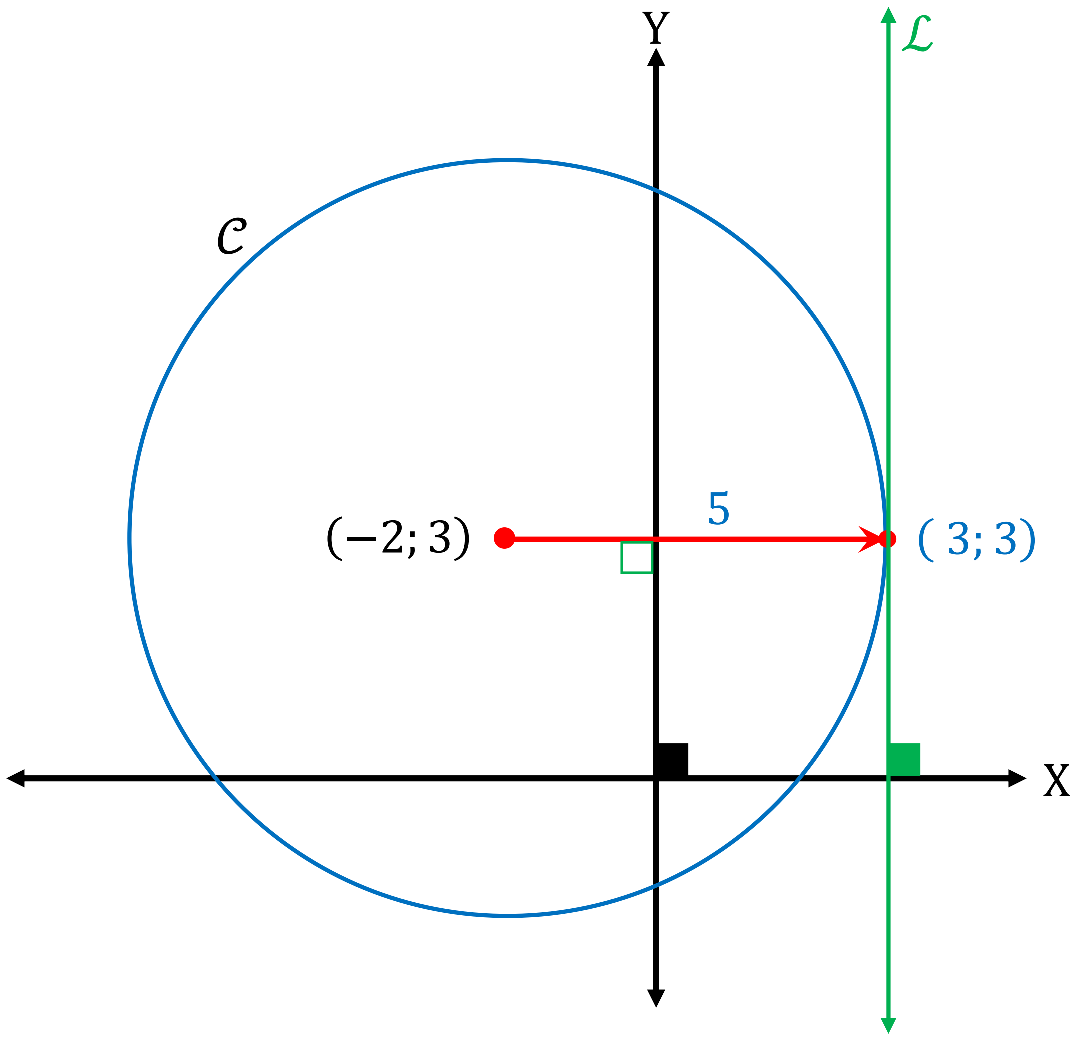
Resolución:

$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

$\mathcal{C}: x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 12 + 4 + 9$

$\mathcal{C}: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$

$C(-2;3) \wedge r = 5$



$\therefore \mathcal{L}: x = 3$

CLAVE: B

2. Las circunferencias: $\mathcal{C}_1: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ y $\mathcal{C}_2: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$. Son:

Resolución:

$C_1: (-1\,;1) \wedge r = 1$ $\qquad$ $C_2: (-1\,;-1) \wedge R = 3$

$$d_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} = \sqrt{\big(-1-(-1)\big)^2 + \big(1-(-1)\big)^2}$$

$$d_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} = \sqrt{(0)^2 + (2)^2}$$

$$d_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} = 2$$

$$d_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} = R - r$$

$\therefore$ **Las Circunferencias son Tangentes Interiores**

CLAVE: C

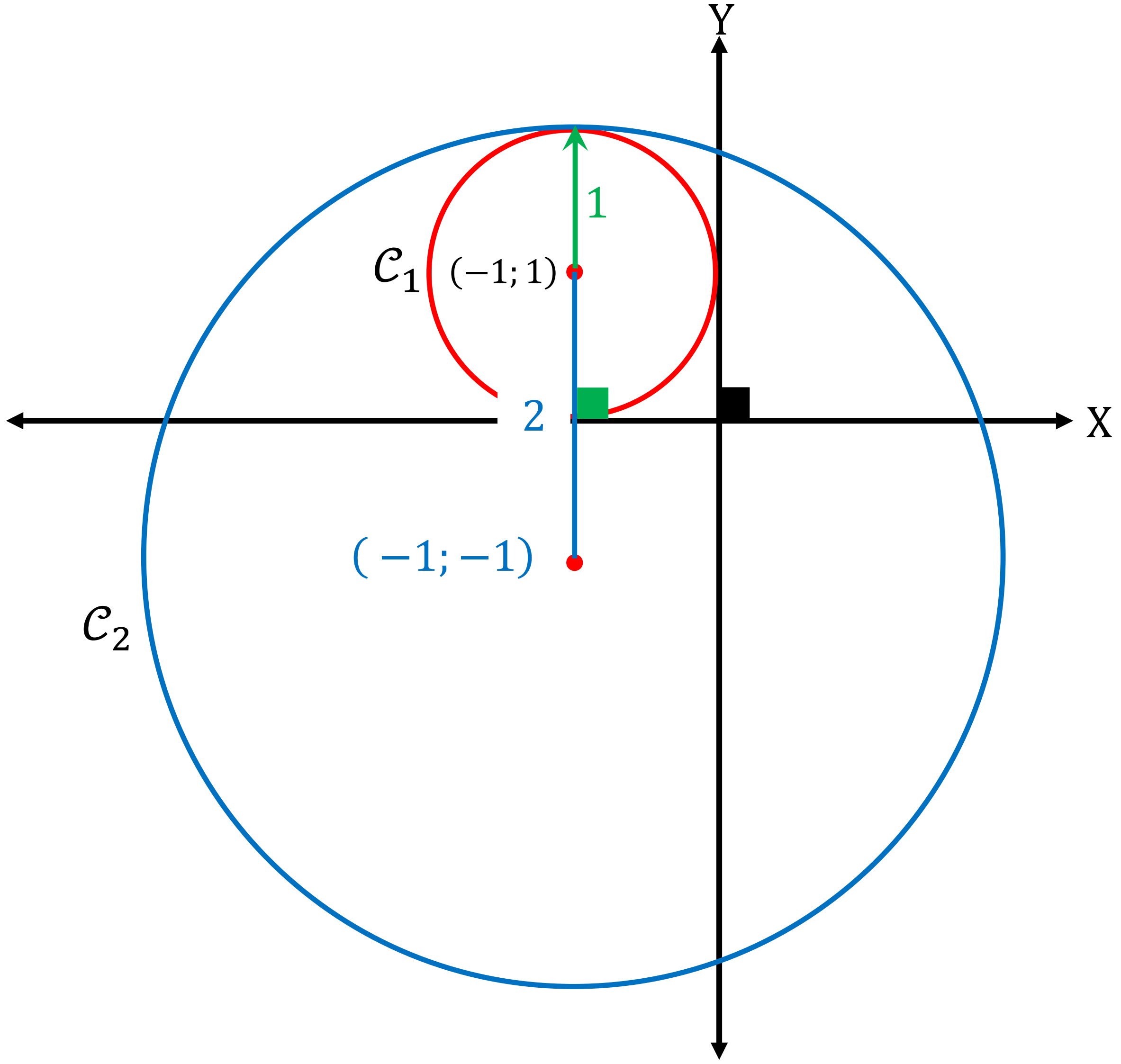
CIRCUNFERENCIA

2. Las circunferencias: $\mathcal{C}_1: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ y $\mathcal{C}_2: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$. Son:

Resolución:

$\mathcal{C}_1: (-1\,;1) \wedge r = 1$

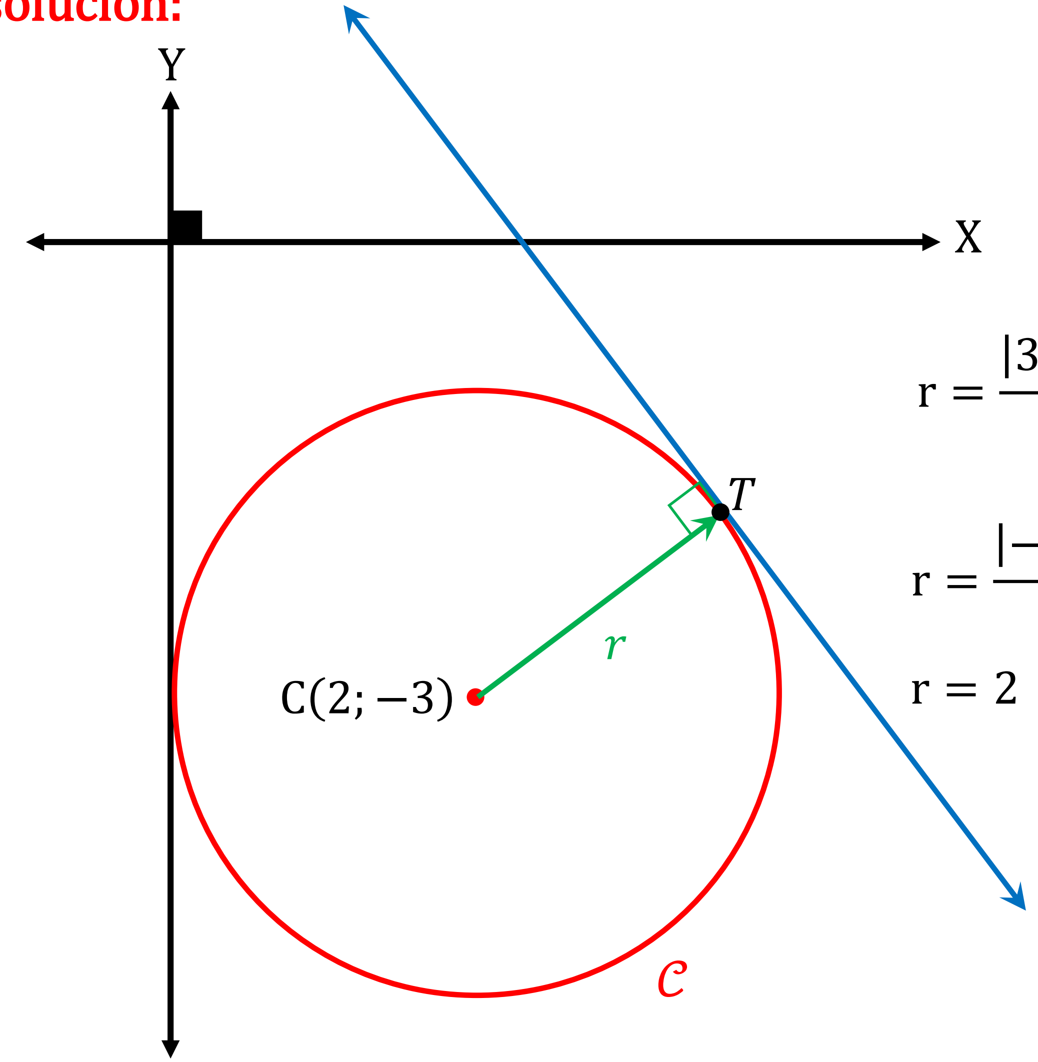
$\mathcal{C}_2: (-1\,;-1) \wedge R = 3$



CIRCUNFERENCIA

3. Determine la ecuación de la circunferencia con centro en (2;−3) y que es tangente a la recta 4y+3x−4=0

Resolución:



$\mathcal{L}: 3x + 4y - 4 = 0$

$$r = \frac{|3(2) + 4(-3) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$r = \frac{|-10|}{5}$$

$$r = 2$$

$\mathcal{C}: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$\mathcal{C}: (x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 2^2$

$\mathcal{C}: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$

$\mathcal{C}: x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 4$

$\therefore \mathcal{C}: \mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0}$

CLAVE: A

CIRCUNFERENCIA

4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$. En el punto $A(-5;\ 7)$

Resolución:

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}: xx_1 + yy_1 + \frac{4}{2}(x + x_1) - \frac{6}{2}(y + y_1) - 12 = 0$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}: x(-5) + y(7) + 2(x + (-5)) - 3(y + (7)) - 12 = 0$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}: -5x + 7y + 2x - 10 - 3y - 21 - 12 = 0$$

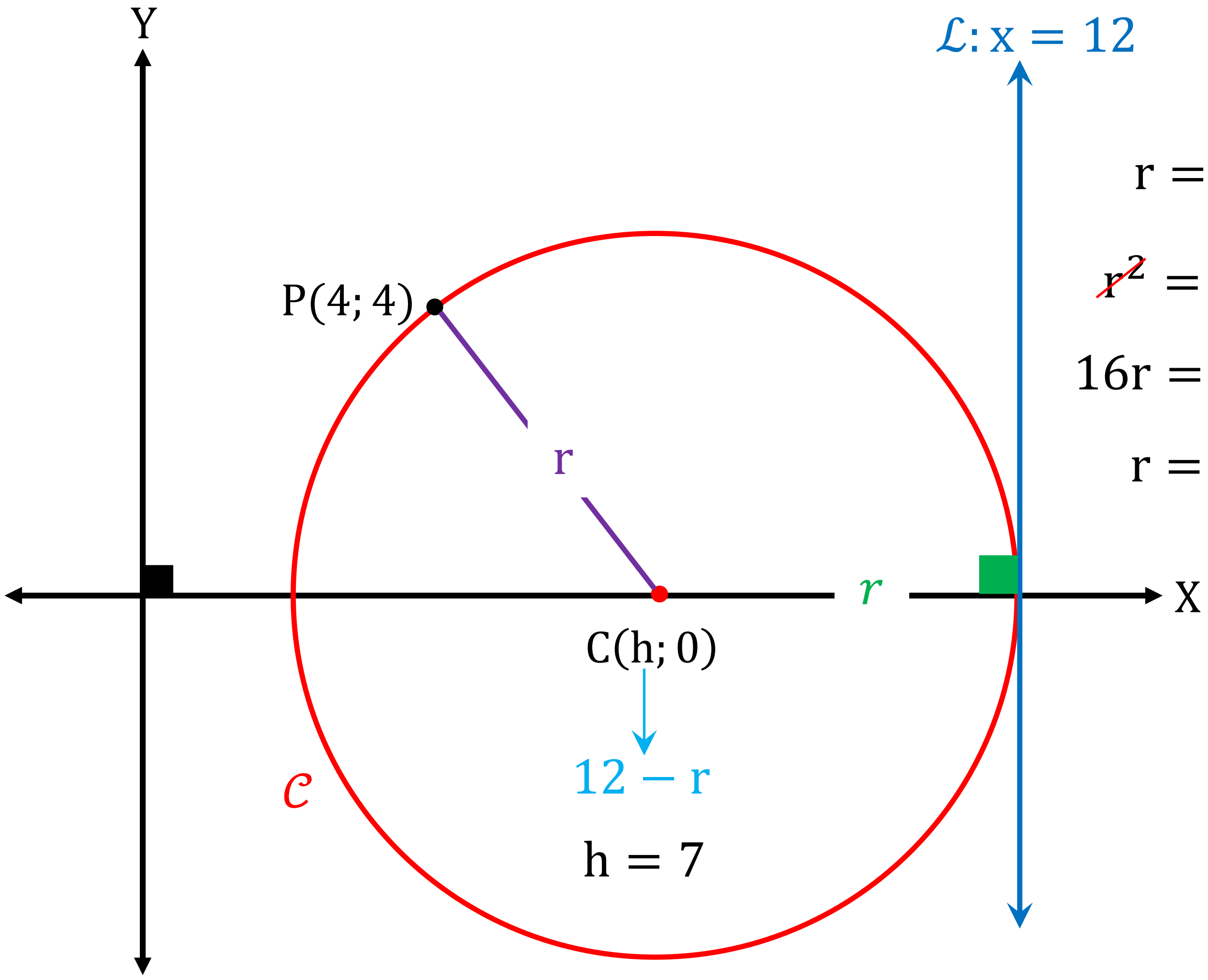
$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}: -3x + 4y - 43 = 0$$

$$\therefore\ \mathcal{L}_{\mathcal{T}}: \mathbf{3x - 4y + 43 = 0}$$

CLAVE: E

5. Se tiene una circunferencia con centro en el eje x, tangente a la recta, $x - 12 = 0$; y pasa por el punto $(4;\ 4)$.Calcular la ecuación de dicha circunferencia.

Resolución:



$$r = \sqrt{(r-8)^2 + 4^2}$$

$$\cancel{r^2} = \cancel{r^2} - 16r + 64 + 16$$

$$16r = 80$$

$$r = 5 \quad \rightarrow \quad C(7;0)$$

$$\mathcal{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

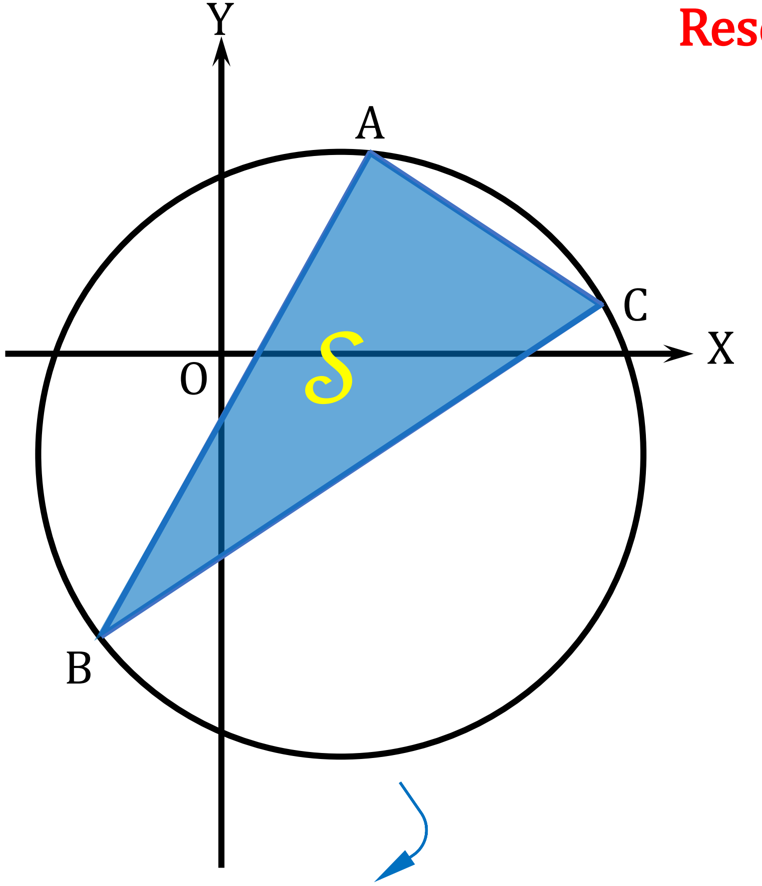
$$\mathcal{C}: (x-7)^2 + (y-0)^2 = 5^2$$

$$\mathcal{C}: x^2 - 14x + 49 + y^2 = 25$$

$$\therefore \mathcal{C}: \mathbf{x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0}$$

CLAVE: A

6. En la figura: la abscisa de B es -1, la ordenada de C es 1 y la abscisa de A es 2. Calcular el área del triángulo ABC.



$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$$

Resolución: Sea: $A(2;a)$; $B(-1;b)$ y $C(c;1)$

$A(2;a) \in \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}: (2)^2 + (a)^2 - 4(2) + 6(a) = 12$

$$a^2 + 6a - 16 = 0$$

$a \quad +8 \rightarrow a = -8$

$a \quad -2 \rightarrow \boxed{a = 2}$

$B(-1;b) \in \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}: (-1)^2 + (b)^2 - 4(-1) + 6(b) = 12$

$$b^2 + 6b - 7 = 0$$

$b \quad +7 \rightarrow \boxed{b = -7}$

$b \quad -1 \rightarrow b = 1$

$C(c;1) \in \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}: (c)^2 + (1)^2 - 4(c) + 6(1) = 12$

$$c^2 - 4c - 5 = 0$$

$c \quad -5 \rightarrow \boxed{c = 5}$

$c \quad +1 \rightarrow c = -1$

$$\begin{array}{r|rr|r} & 2 & 2 & \\ -2 & -1 & -7 & -14 \\ -35 & 5 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 10 \\ \hline -35 & & & -5 \end{array}$$

$$\mathcal{S} = \frac{-5 - (-35)}{2}$$

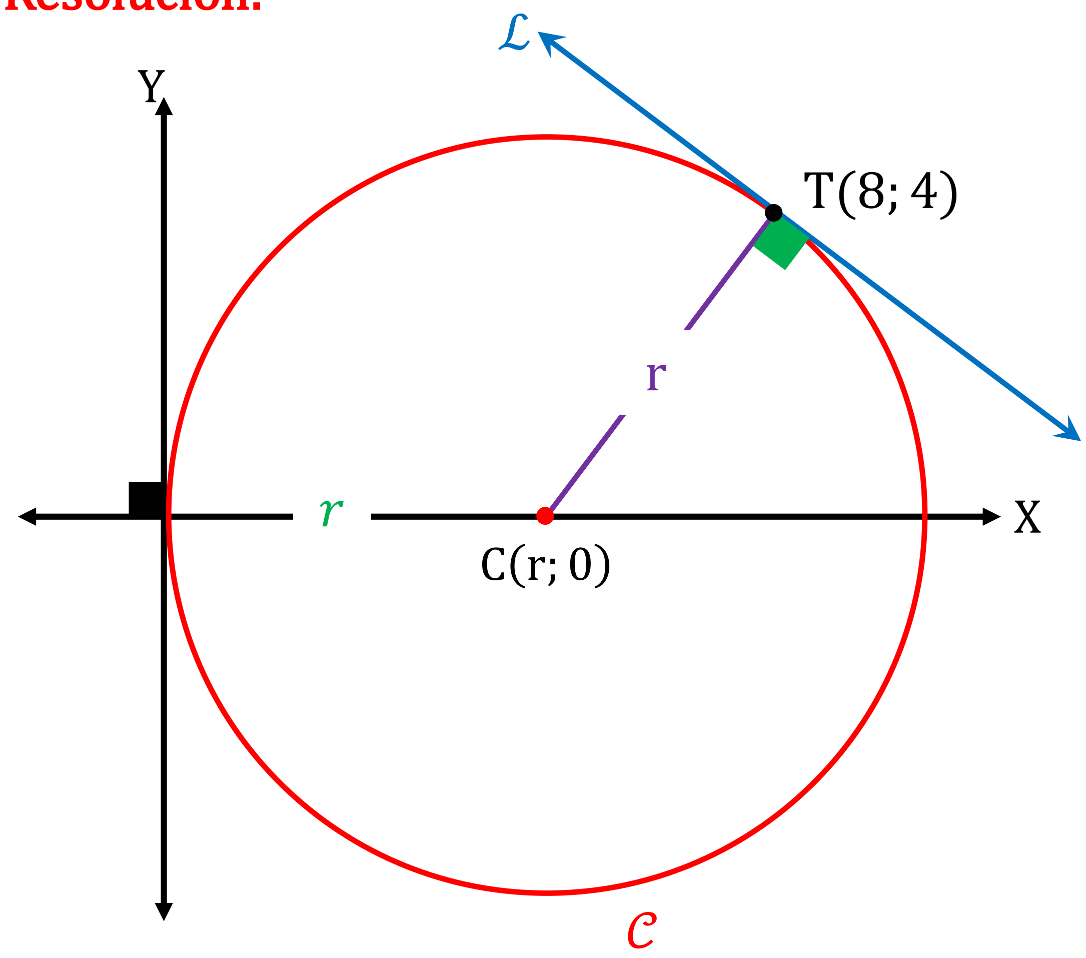
$\therefore \mathcal{S} = 15$

CLAVE: C

CIRCUNFERENCIA

7. Dada una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y cuyo centro se ubica en el eje de abscisas. Si una recta es tangente a dicha circunferencia en el punto (8; 4), halle la ecuación de la circunferencia.

Resolución:



$$r = \sqrt{(r-8)^2 + 4^2}$$

$$\cancel{r^2} = \cancel{r^2} - 16r + 64 + 16$$

$$16r = 80$$

$$r = 5 \quad \rightarrow \quad C(5; 0)$$

$$\mathcal{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

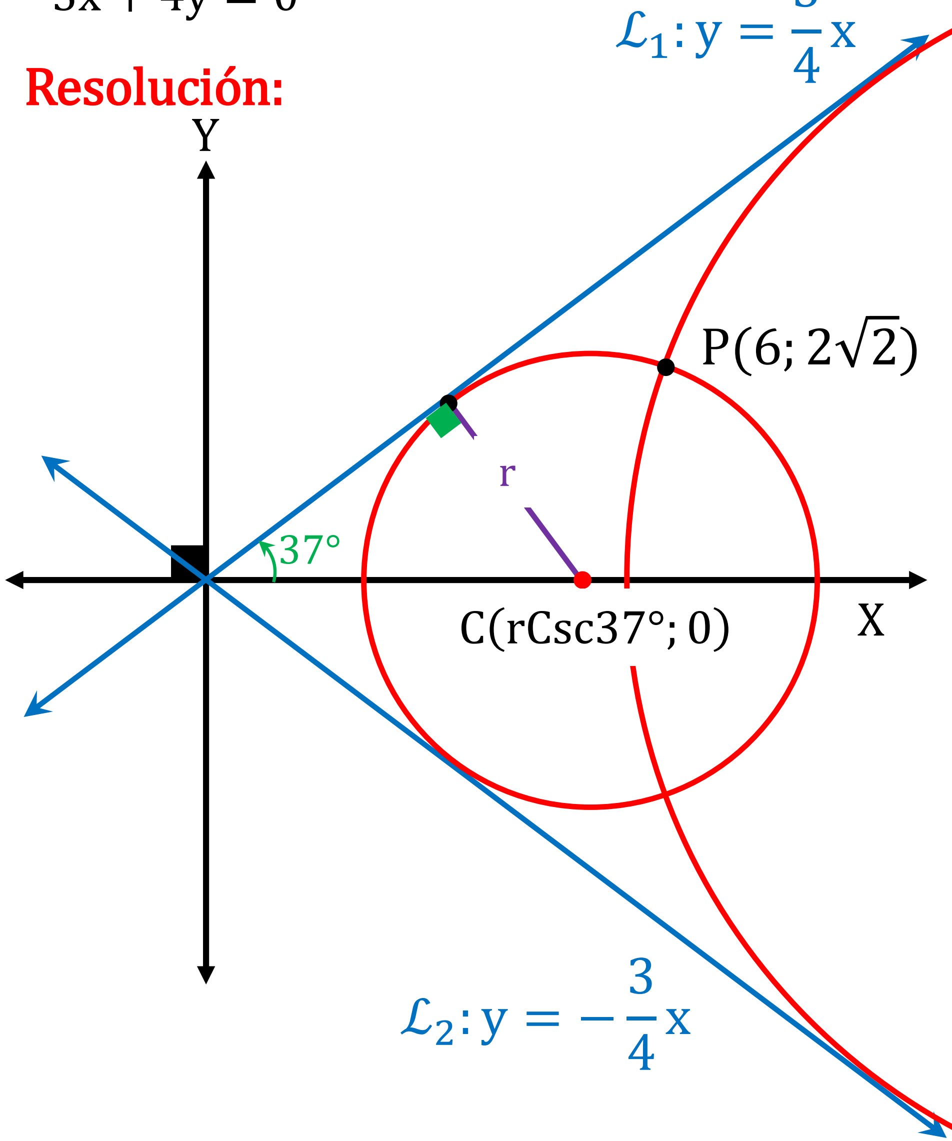
$$\mathcal{C}: (x-5)^2 + (y-0)^2 = 5^2$$

$$\therefore \boldsymbol{\mathcal{C}: (x-5)^2 + y^2 = 25}$$

CLAVE: A

8. Hallar la ecuación de la circunferencia de menor radio que pasa por $(6; 2\sqrt{2})$ y es tangente a las rectas: $y = \frac{3}{4}x$
$3x + 4y = 0$

Resolución:



$$r = PC$$

$$r = \sqrt{\left(6 - \frac{5r}{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}$$

$$r^2 = 36 - 20r + \frac{25r^2}{9} + 8$$

$$\frac{16r^2}{9} - 20r + 44 = 0$$

$$4r^2 - 45r + 99 = 0$$

$$\begin{array}{lll} 4r & -33 & \rightarrow r = \frac{33}{4} \\ r & -3 & \rightarrow \boxed{r = 3} \end{array}$$

$$\mathcal{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\mathcal{C}: (x-5)^2 + (y-0)^2 = 3^2$$

$$\mathcal{C}: x^2 - 10x + 25 + y^2 = 9$$

$$\therefore \mathcal{C}: \mathbf{x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0}$$

CLAVE: B

CIRCUNFERENCIA

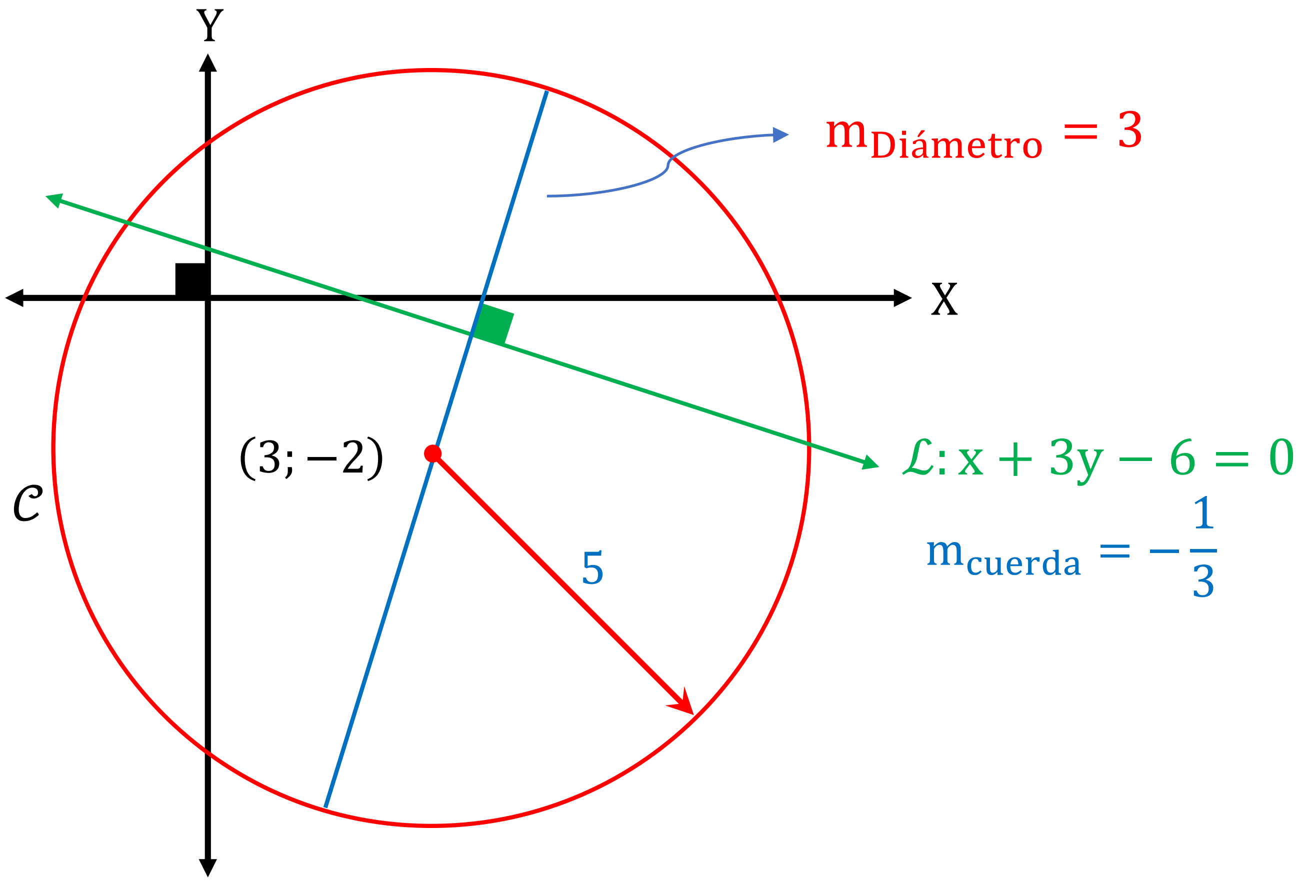
9. Determinar la ecuación del diámetro de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ que biseca la cuerda cuya ecuación es: $x + 3y - 6 = 0$

Resolución:

$$\mathcal{C}: x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 12 + 9 + 4$$

$$\mathcal{C}: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 5^2$$

$$C(3\,;-2) \wedge r = 5$$



$$\mathcal{L}: (y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$\mathcal{L}: (y - (-2)) = 3(x - (3))$$

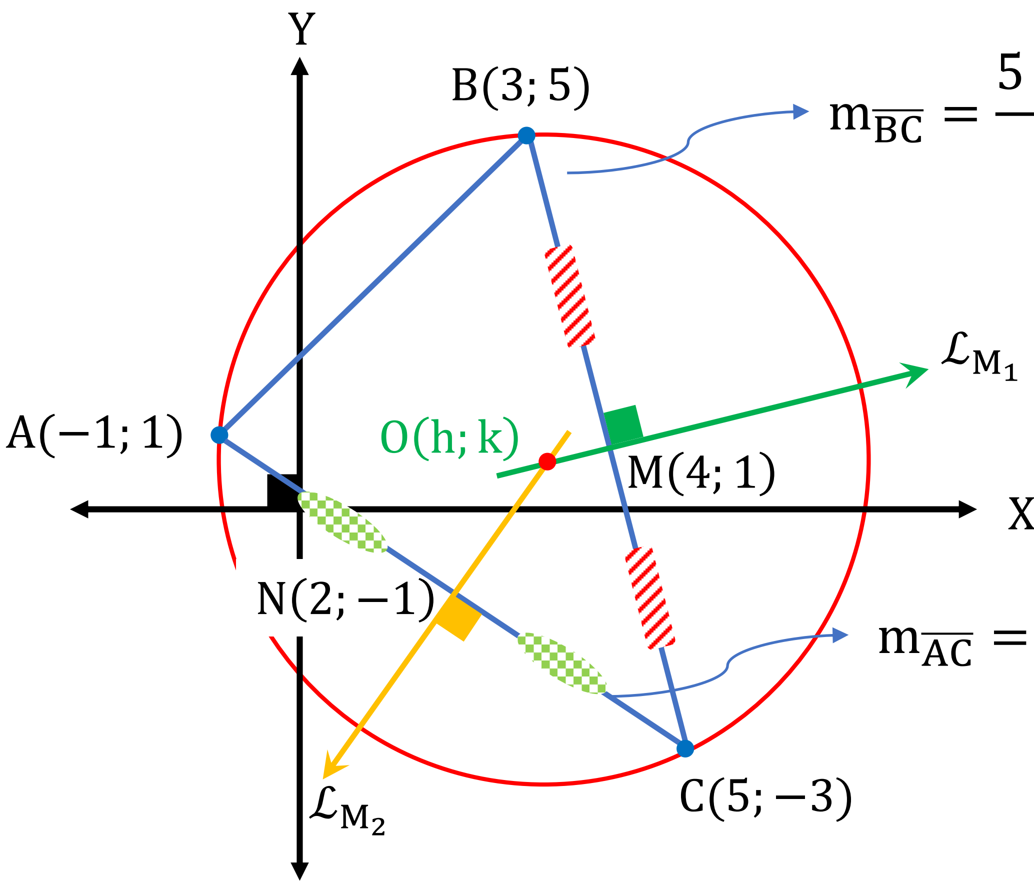
$$\mathcal{L}: y + 2 = 3x - 9$$

$$\therefore \mathcal{L}: \mathbf{y = 3x - 11}$$

CLAVE: E

10. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(-1;1)$, $B(3;\ 5)$ y $C(5;-3)$

Resolución:



$$m_{\overline{BC}} = \frac{5-(-3)}{3-5} = -4 \rightarrow m_{M_1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{k-1}{h-4} = \frac{1}{4}$$

$$4k = h \ldots (\mathrm{I})$$

$$m_{\overline{AC}} = \frac{1-(-3)}{-1-5} = -\frac{2}{3} \rightarrow m_{M_2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{k-(-1)}{h-2} = \frac{3}{2}$$

$$2k + 8 = 3h \ldots (\mathrm{II})$$

(I) en (II): $2k + 8 = 3(4k)$

$$k = \frac{4}{5} \rightarrow h = \frac{16}{5}$$

$$O\left(\frac{16}{5};\frac{4}{5}\right)$$

radio = OA

CIRCUNFERENCIA

$$\rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{16}{5} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - 1\right)^2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{441}{25} + \frac{1}{25}}$$

$$r = \sqrt{\frac{442}{25}}$$

$$O\left(\frac{16}{5};\frac{4}{5}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{442}{25}}$$

$$\mathcal{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\mathcal{C}: \left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{442}{25}}\right)^2$$

$$\mathcal{C}: x^2 - \frac{32x}{5} + \frac{196}{25} + y^2 - \frac{8y}{5} + \frac{16}{25} = \frac{442}{25}$$

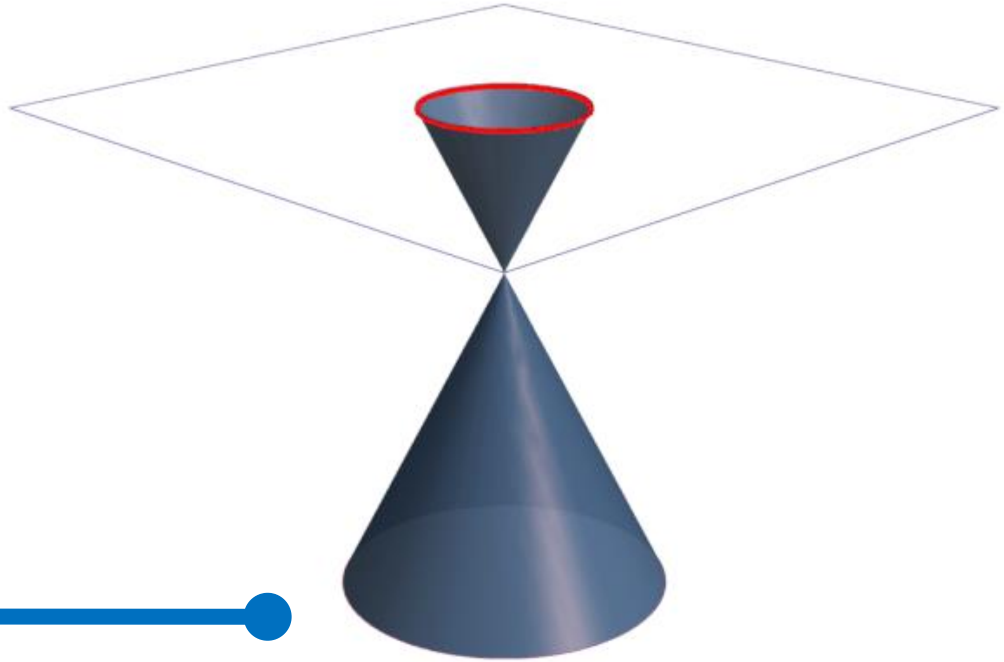
$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 - \frac{32x}{5} - \frac{8y}{5} - \frac{34}{5} = 0$$

$$\therefore \mathcal{C}: \mathbf{5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0}$$

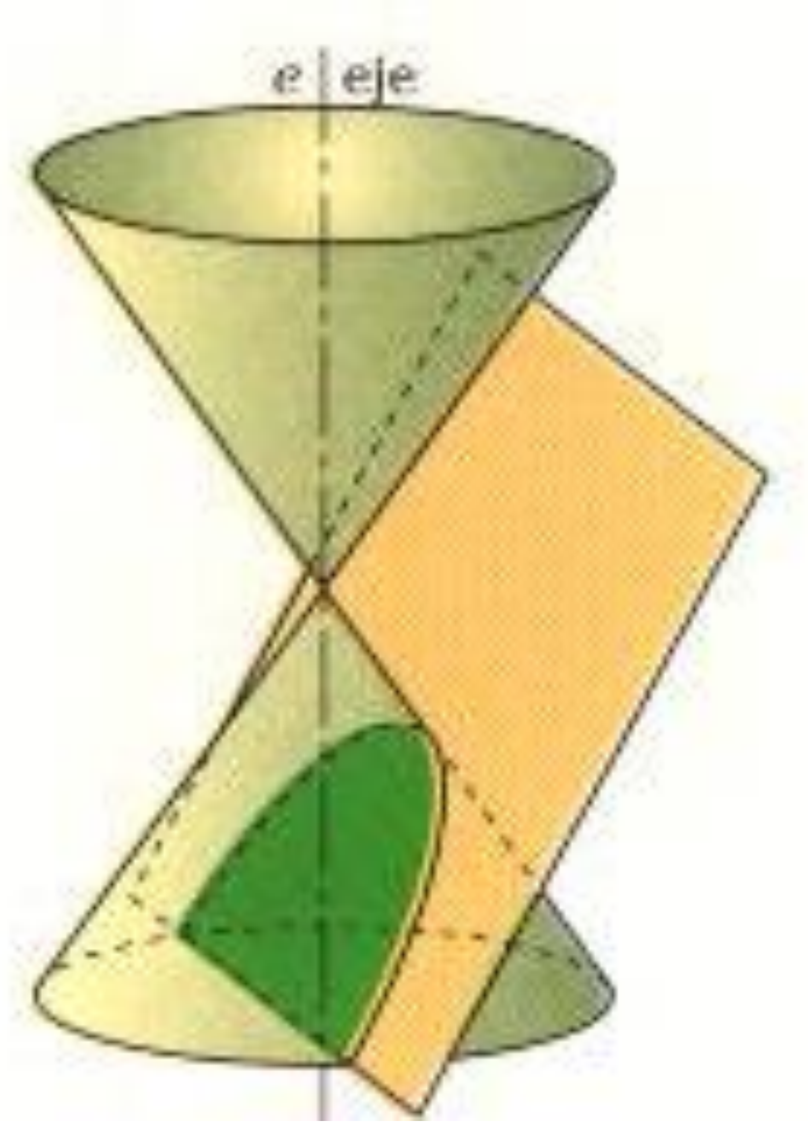
CLAVE: C

CÓNICAS

PARÁBOLA



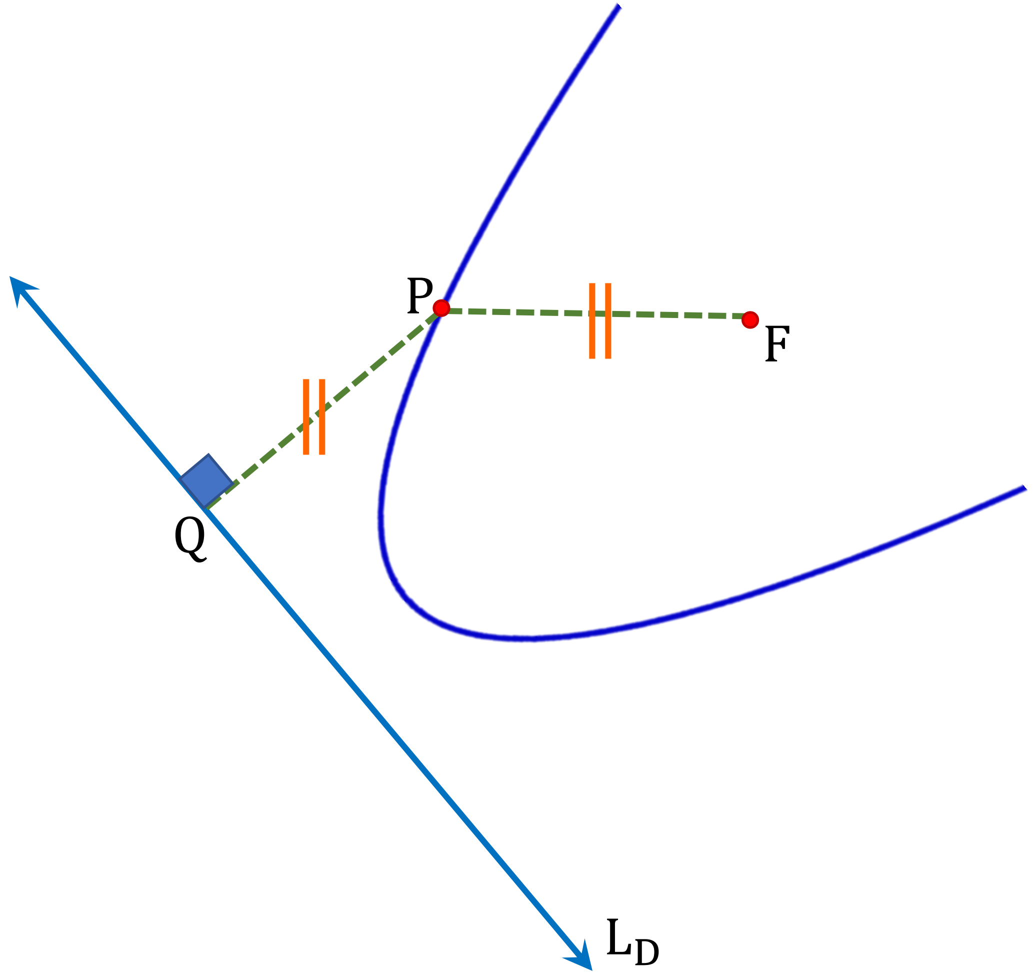
PARÁBOLA



PARÁBOLA

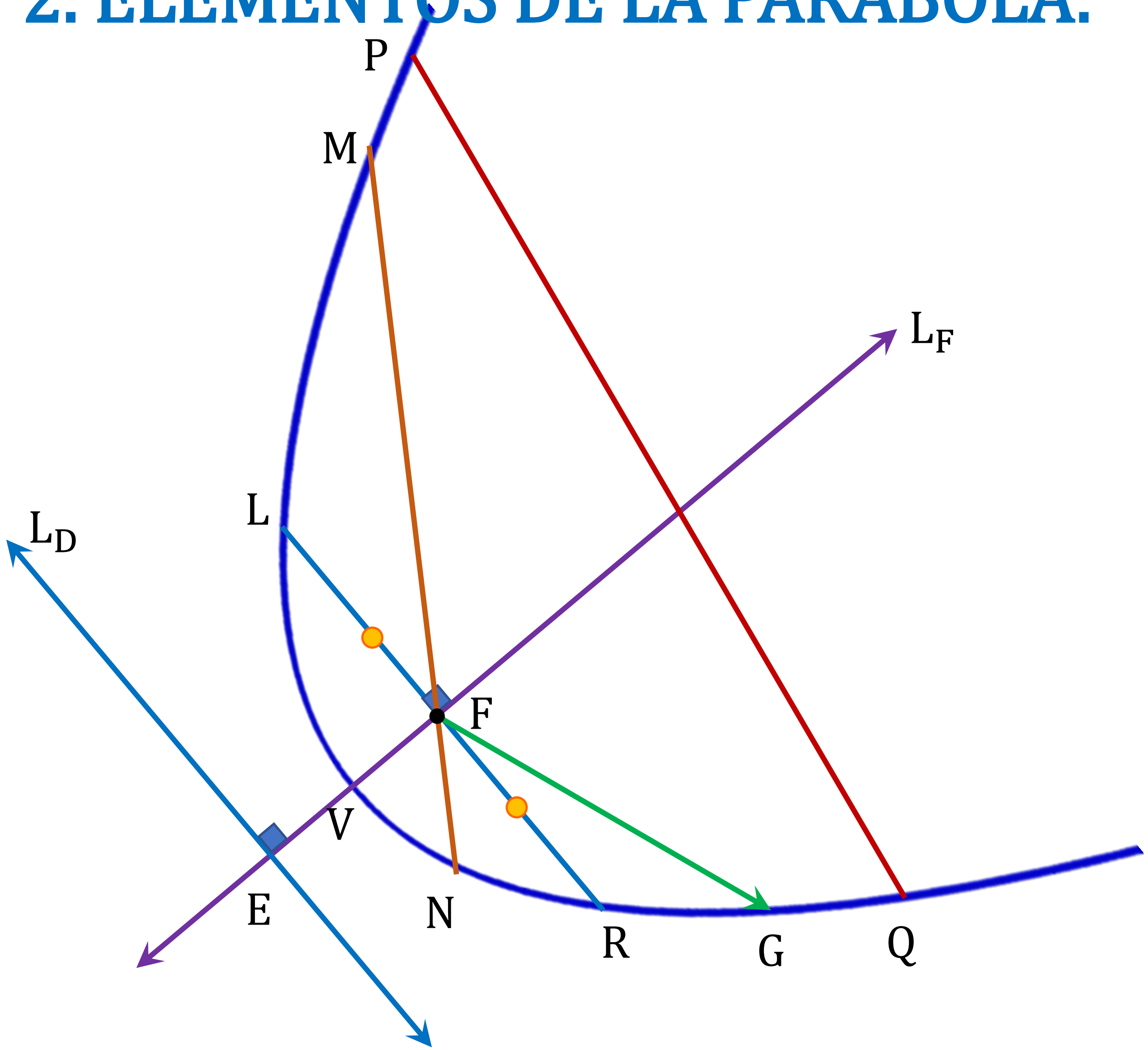
1. DEFINICIÓN:

Es aquel lugar geométrico de todos los puntos que pertenecen a un mismo plano, tal que equidistan de una recta fija del plano llamada directriz y un punto fijo llamado foco.



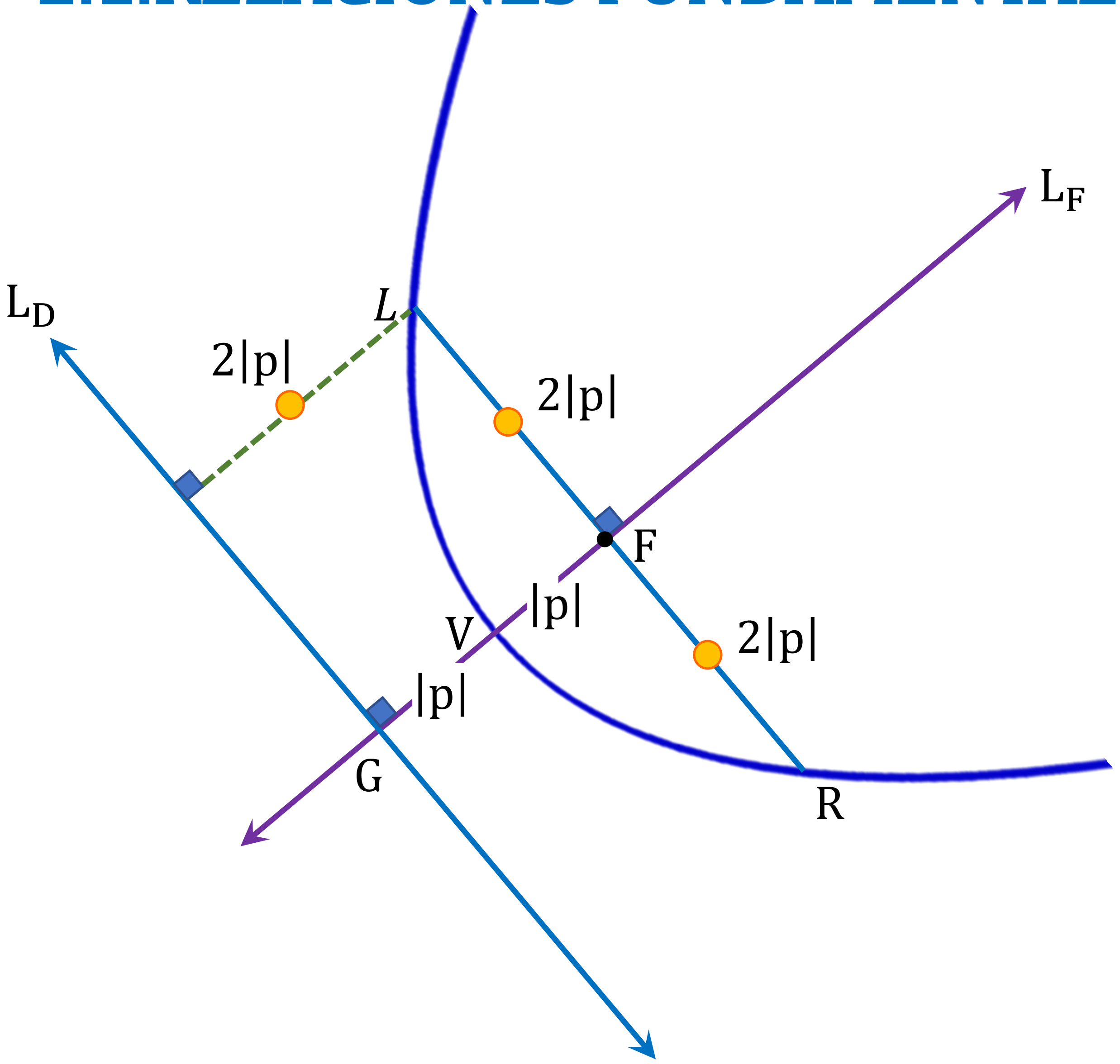
$$d\overline{PQ} = d\overline{PF}$$

2. ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA:



- $\overleftrightarrow{L_D}$: Directriz
- $\overleftrightarrow{L_F}$: Eje Focal
- V: Vértice
- F : Foco
- $\overline{PQ}$: Cuerda
- $\overline{MN}$: Cuerda Focal
- $\overline{LR}$: Lado Recto
- $\overline{FG}$: Radio Vector

2.1.RELACIONES FUNDAMENTALES:

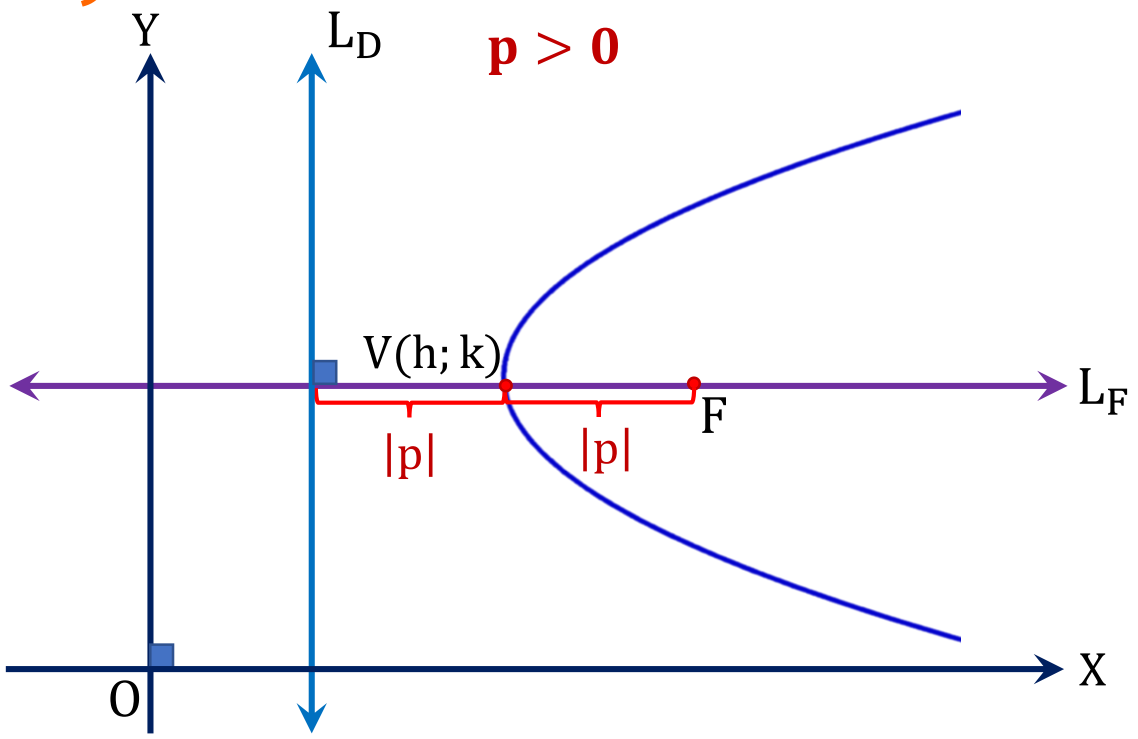


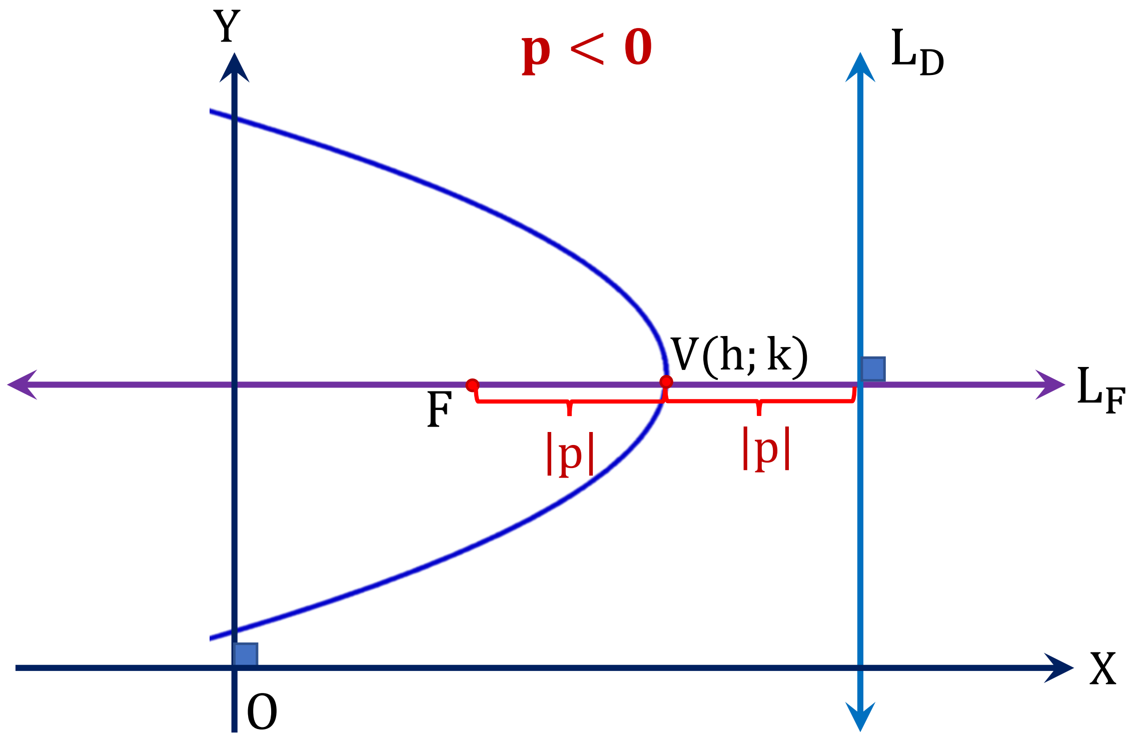
- $VF = VG = |p|$
  p: Parámetro
- $\overline{LR}$: Lado Recto

$$\boxed{\overline{LR} = 4p}$$

3. ECUACIONES DE LA PARÁBOLA:
3.1. EJE FOCAL PARALELO AL EJE X

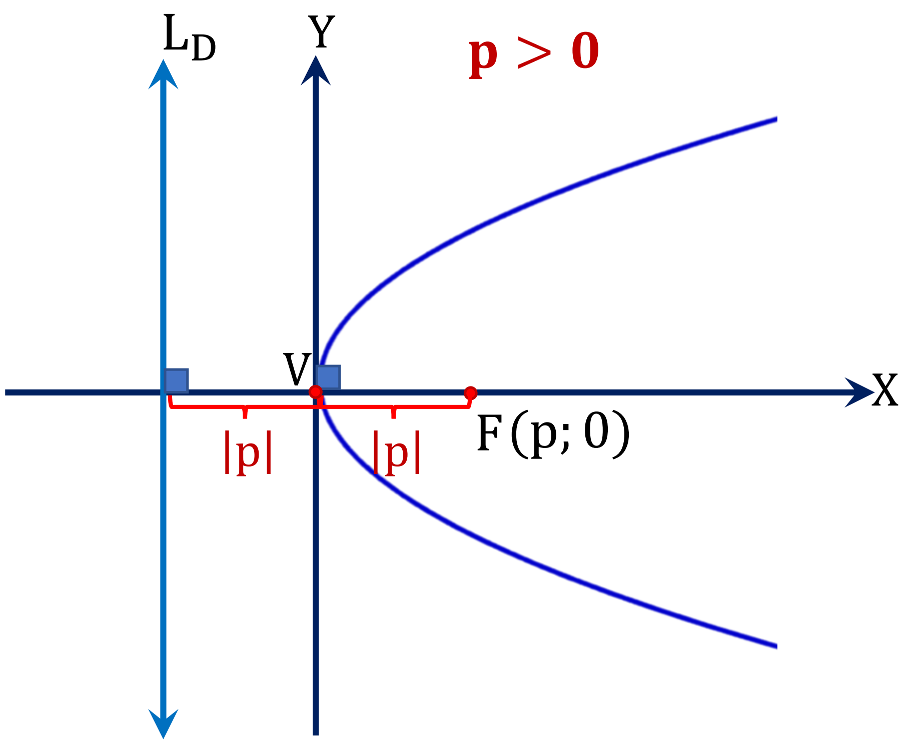
a) ECUACIÓN ORDINARIA

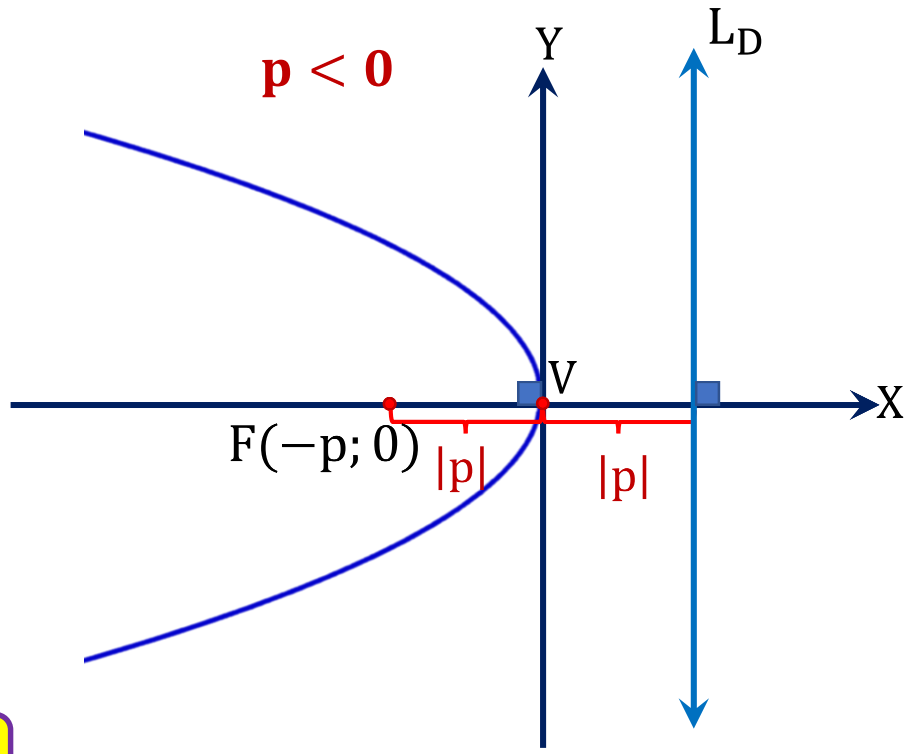




$$\boldsymbol{\mathcal{P}: (y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

b) ECUACIÓN CANÓNICA



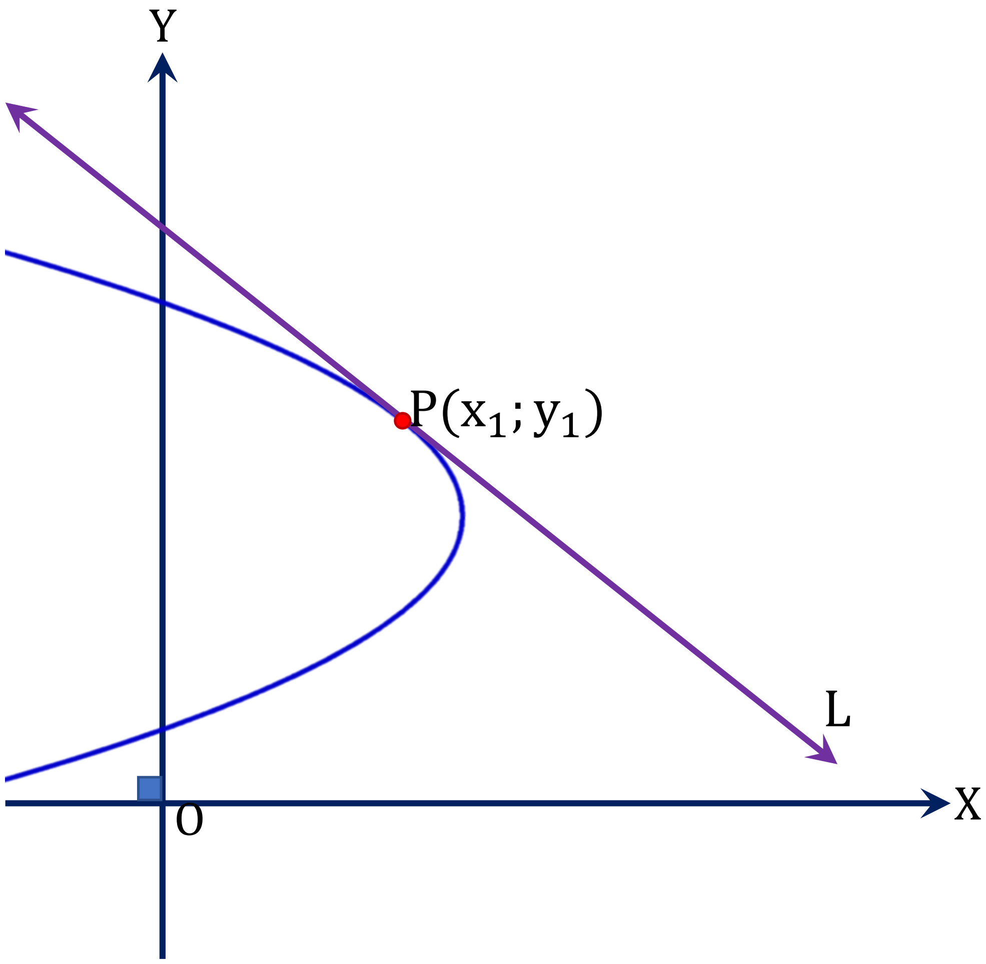


$$\boxed{\mathcal{P}: y^2 = 4px}$$

c) ECUACIÓN GENERAL

$$\boxed{\mathcal{P}: \mathbf{Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}}$$ … Eje Focal ∥ al eje X(o coincidente con el eje X)

➢ ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA PARÁBOLA:



Sea $P(x_1; y_1)$ el punto de tangencia de la recta L y la parábola:

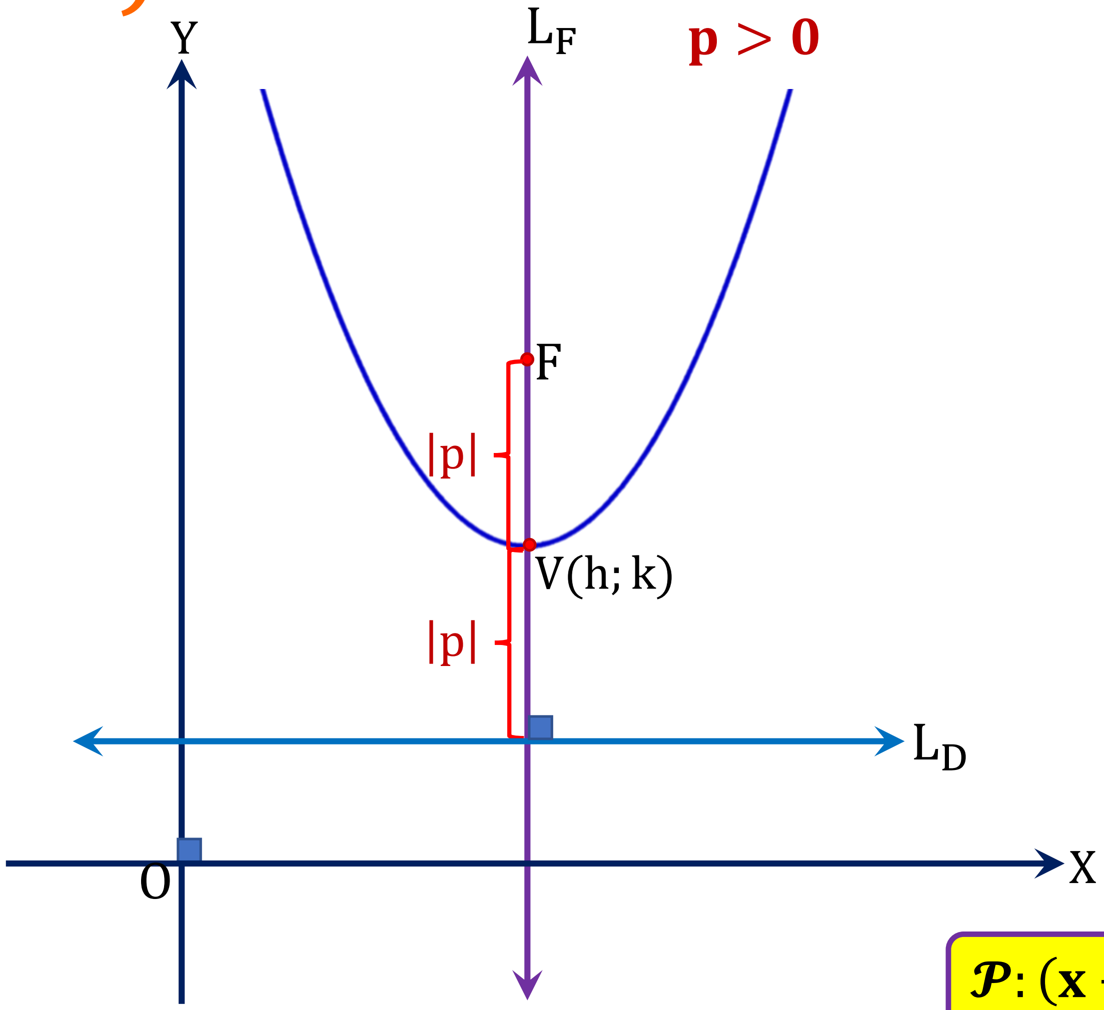
$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

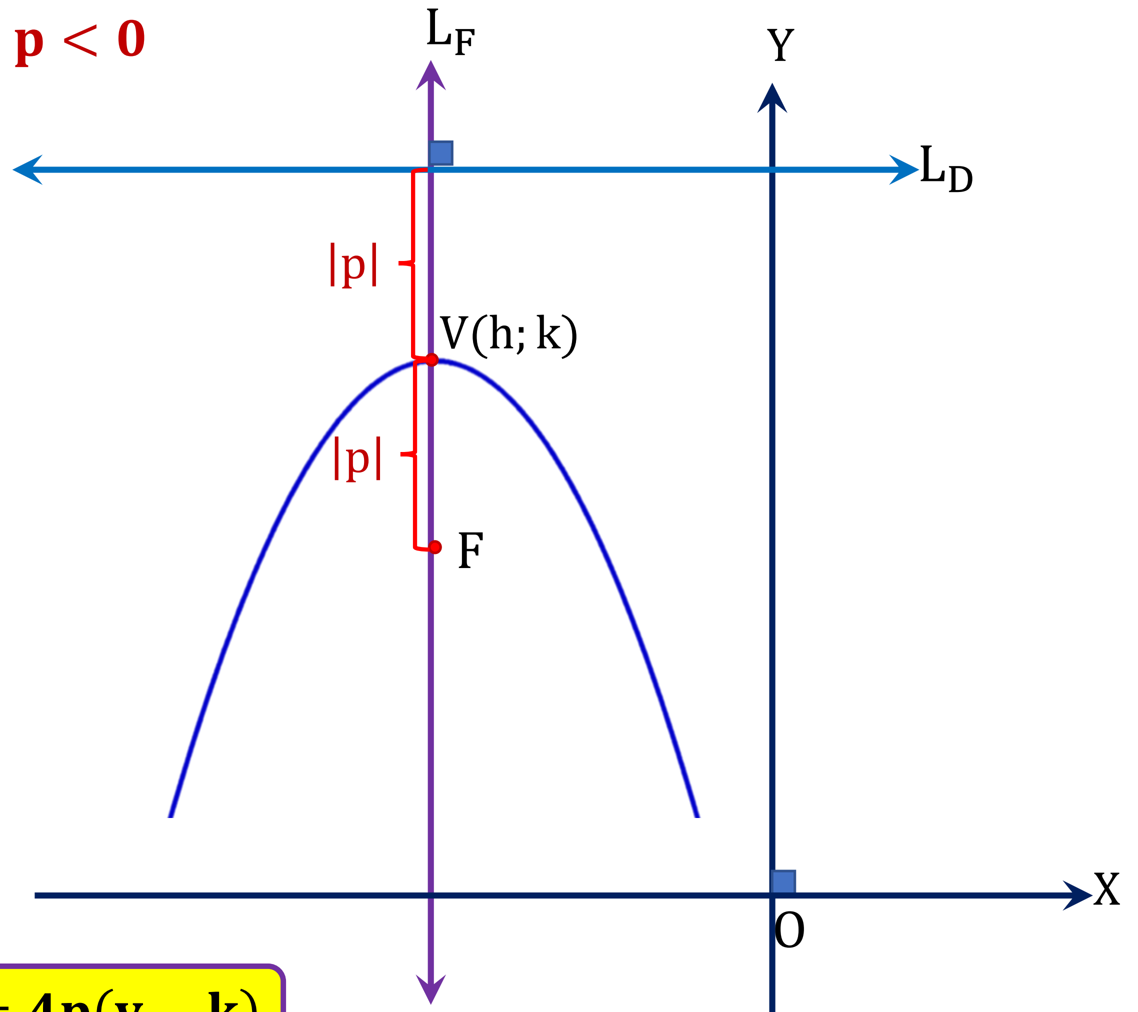
La ecuación de la recta $\overleftrightarrow{L}$ es:

$$\boxed{\mathbf{Cyy_1 + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0}}$$

3.2. EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y

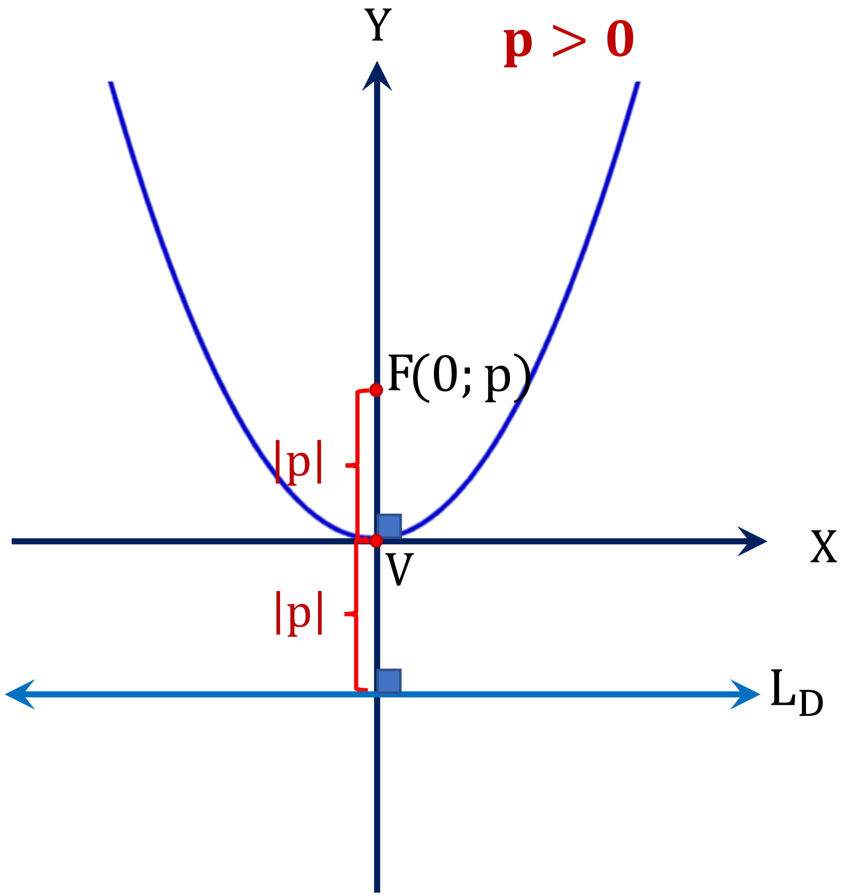
a) ECUACIÓN ORDINARIA

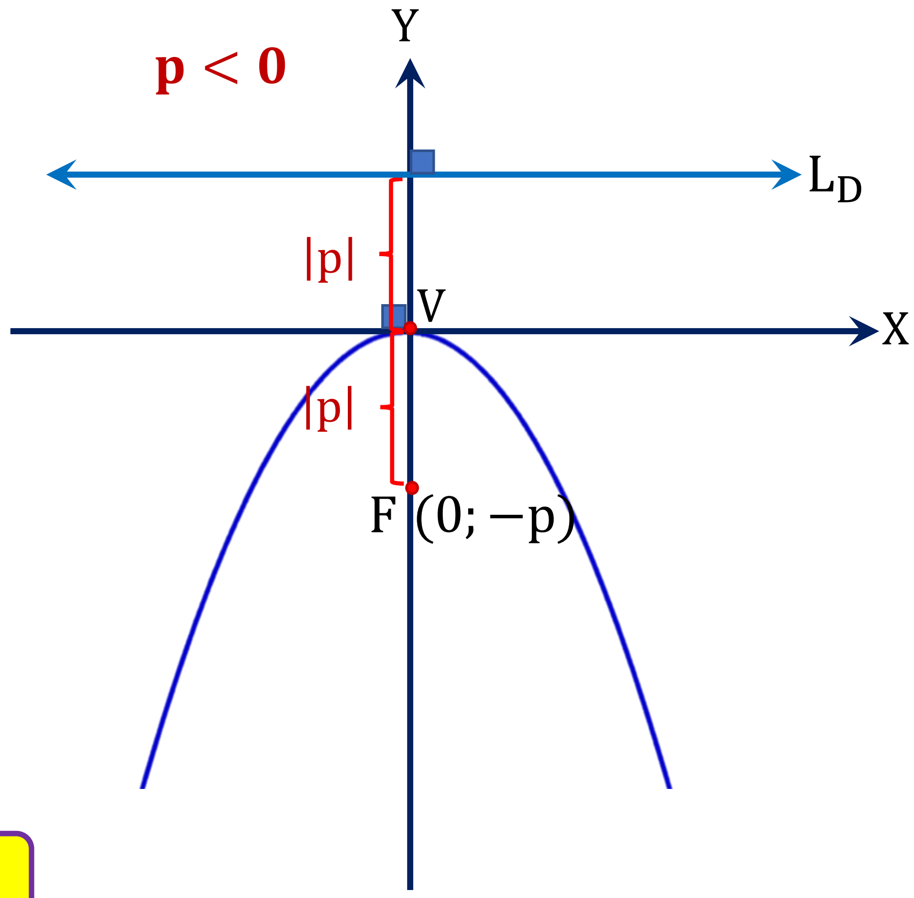




$$\mathcal{P}: (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

b) ECUACIÓN CANÓNICA



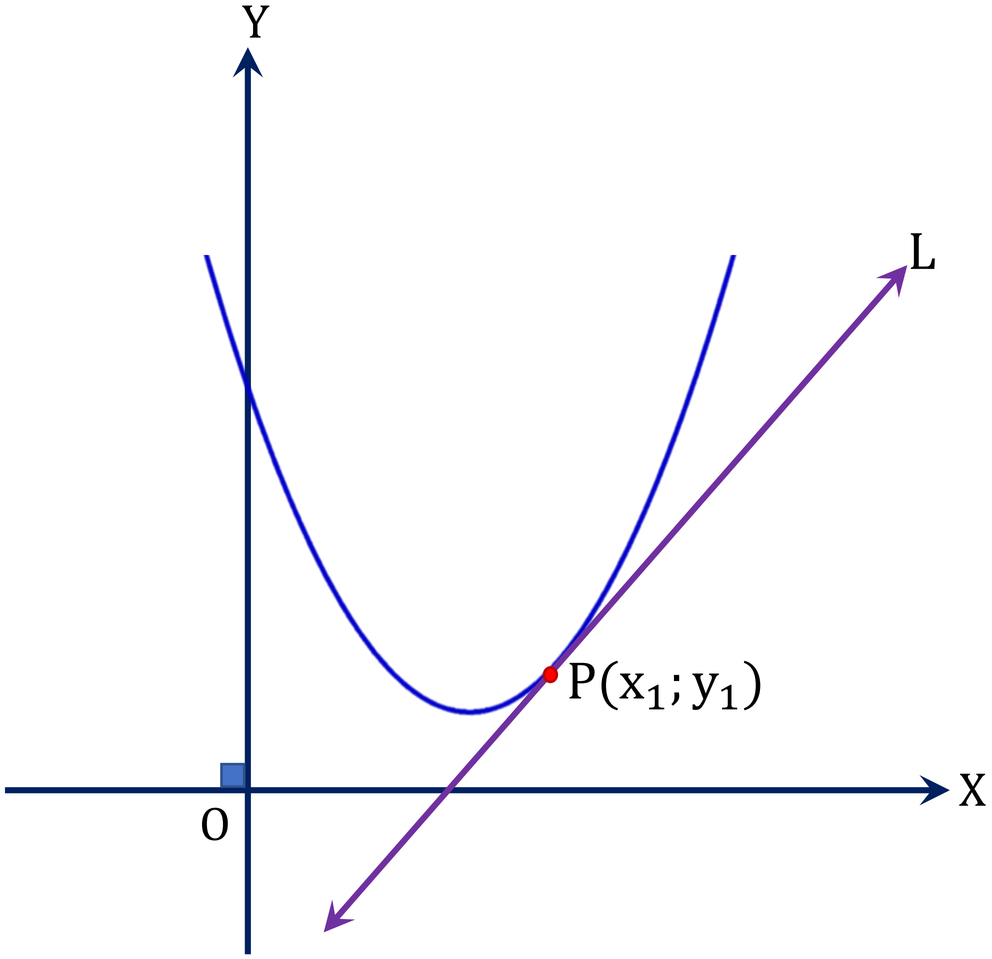


$$\boxed{\mathcal{P}: x^2 = 4py}$$

c) ECUACIÓN GENERAL

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}: \mathbf{Ax^2 + Dx + Ey + F = 0} \quad \cdots \quad \text{Eje Focal} \parallel \text{al eje Y(o coincidente con el eje Y)}$$

➢ ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA PARÁBOLA:



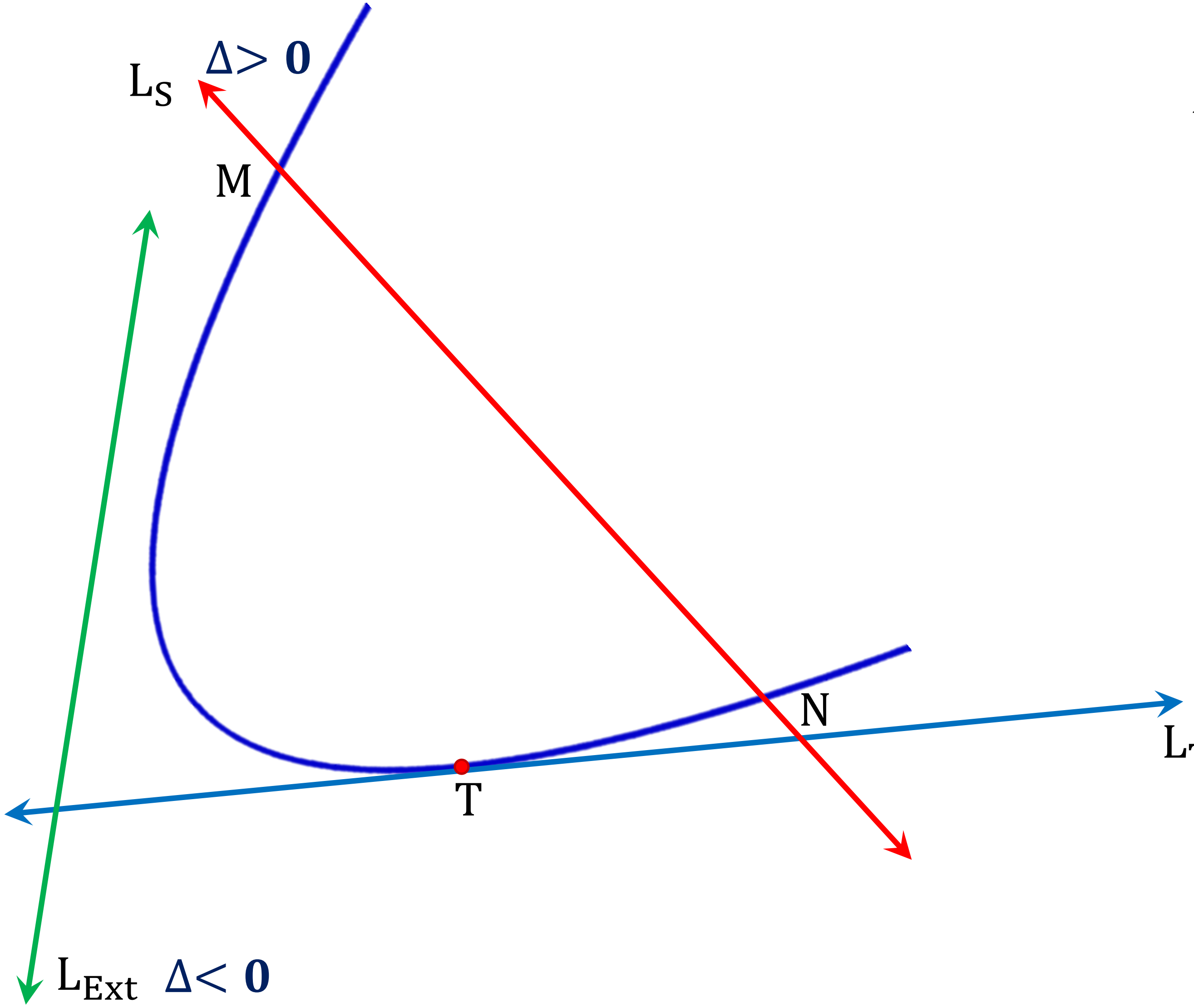
Sea $P(x_1; y_1)$ el punto de tangencia de la recta L y la parábola:

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

La ecuación de la recta $\overleftrightarrow{L}$ es:

$$\boxed{\mathbf{Axx_1 + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0}}$$

5. OBSERVACIÓN: Sea $\mathcal{P}: Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, $AC = 0$ y la $\mathcal{L}: y = mx + b$



$$Ax^2 + C(mx + b)^2 + Dx + E(mx + b) + F = 0$$

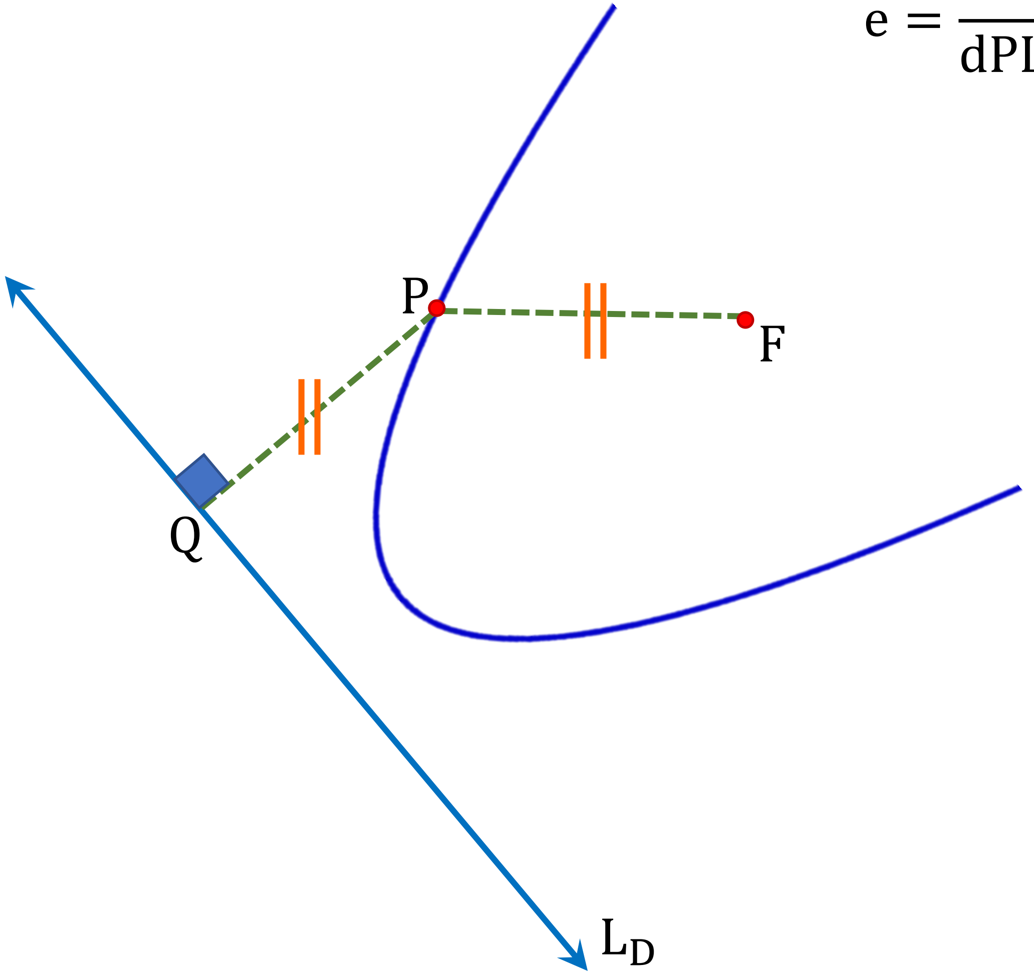
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

5. OBSERVACIÓN:

Excentricidad (e): es la razón entre la distancia de un punto fijo al foco y la distancia entre el punto y su respectiva directriz

$$e = \frac{dPF}{dPL_D}$$



En la Parábola : $\boxed{e = 1}$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

PARÁBOLA

11. Dada la parábola: $x(x+4)=y$, su foco es:

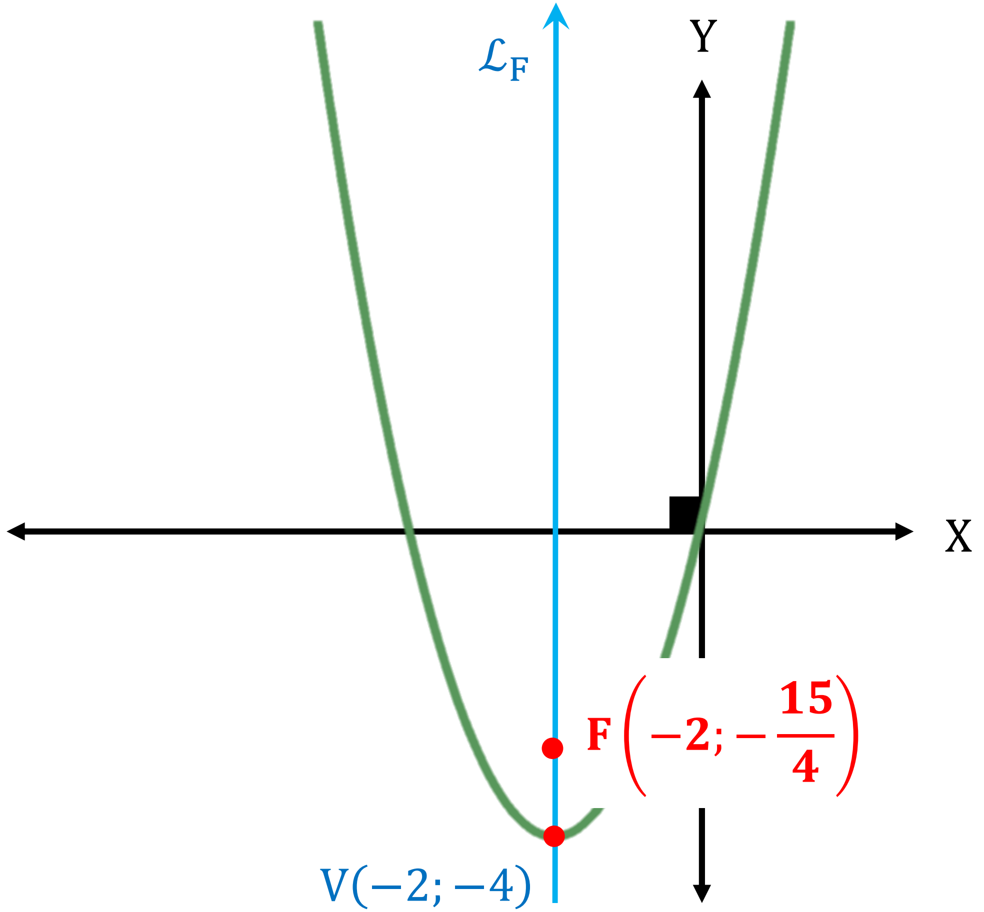
Resolución:

$$\mathcal{P}: x^2+4x+4=y+4$$

$$\mathcal{P}: (x+2)^2=(y+4)$$

$$\mathcal{P}: (x+2)^2=4\left(\frac{1}{4}\right)(y+4)$$

$$V(-2;-4) \quad \wedge \quad p=\frac{1}{4}$$



CLAVE: E

PITAGORAS ACADEMIA

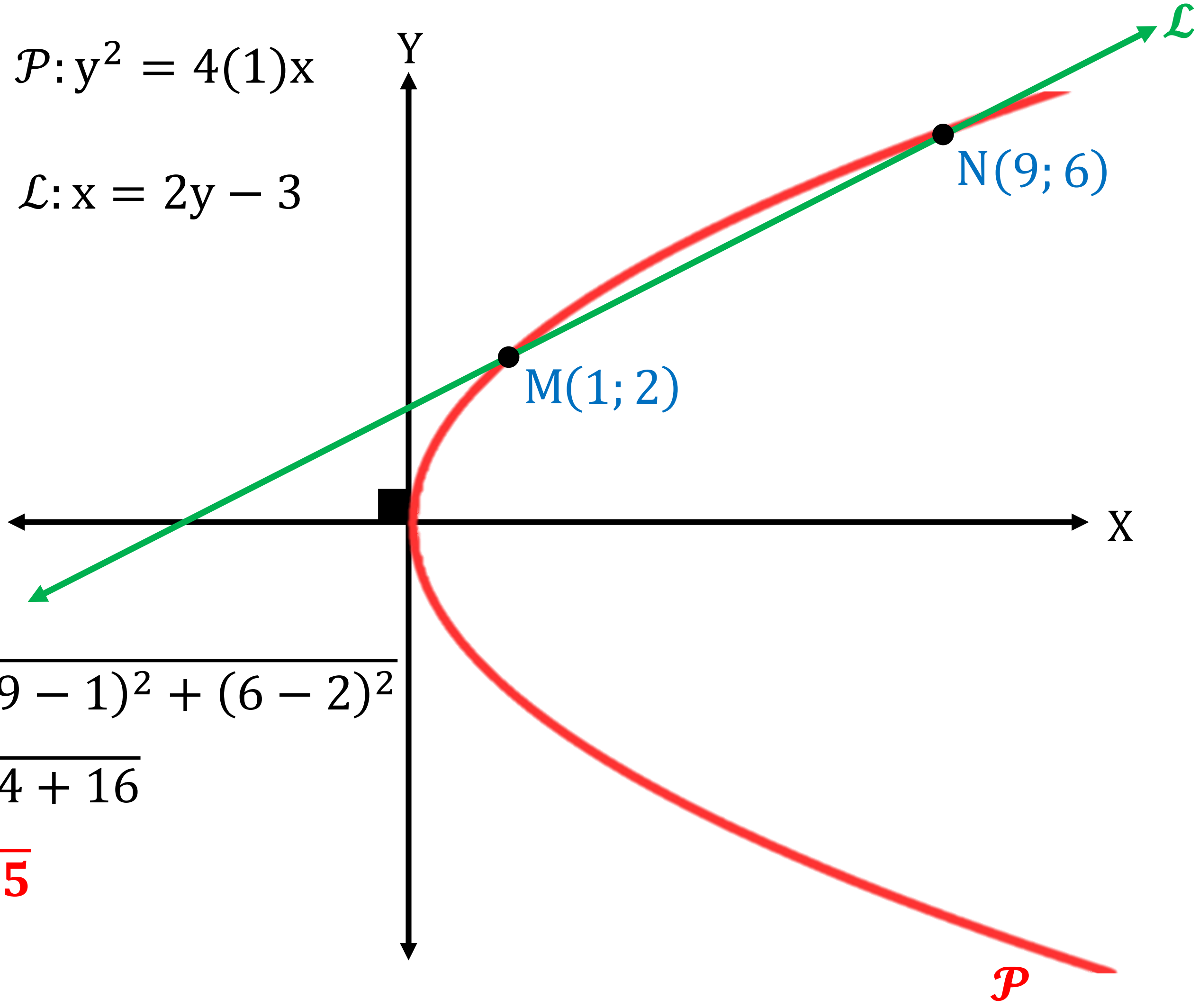
PARÁBOLA

12. Determine la longitud del segmento determinado por la ecuación $y^2 = 4x$, con la recta de ecuación $x = 2y - 3$

Resolución:

$\mathcal{P}: y^2 = 4(1)x$

$\mathcal{L}: x = 2y - 3$



$MN = \sqrt{(9-1)^2 + (6-2)^2}$

$MN = \sqrt{64 + 16}$

$\therefore$ **$MN = 4\sqrt{5}$**

En M y N: $\mathcal{P} = \mathcal{L}$

$y^2 = 4(2y - 3)$

$y^2 - 8y + 12 = 0$

$y \quad -6 \rightarrow y = 6$

$y \quad -2 \rightarrow y = 2$

Reemplazando en $\mathcal{L}$

$x = 2(6) - 3 \rightarrow x = 9$

$x = 2(2) - 3 \rightarrow x = 1$

CLAVE: C

PARÁBOLA

13. Determinar la ecuación de una circunferencia que tiene por diámetro el lado recto de la parábola, cuya ecuación es:
$y^2 = 16x$

Resolución:

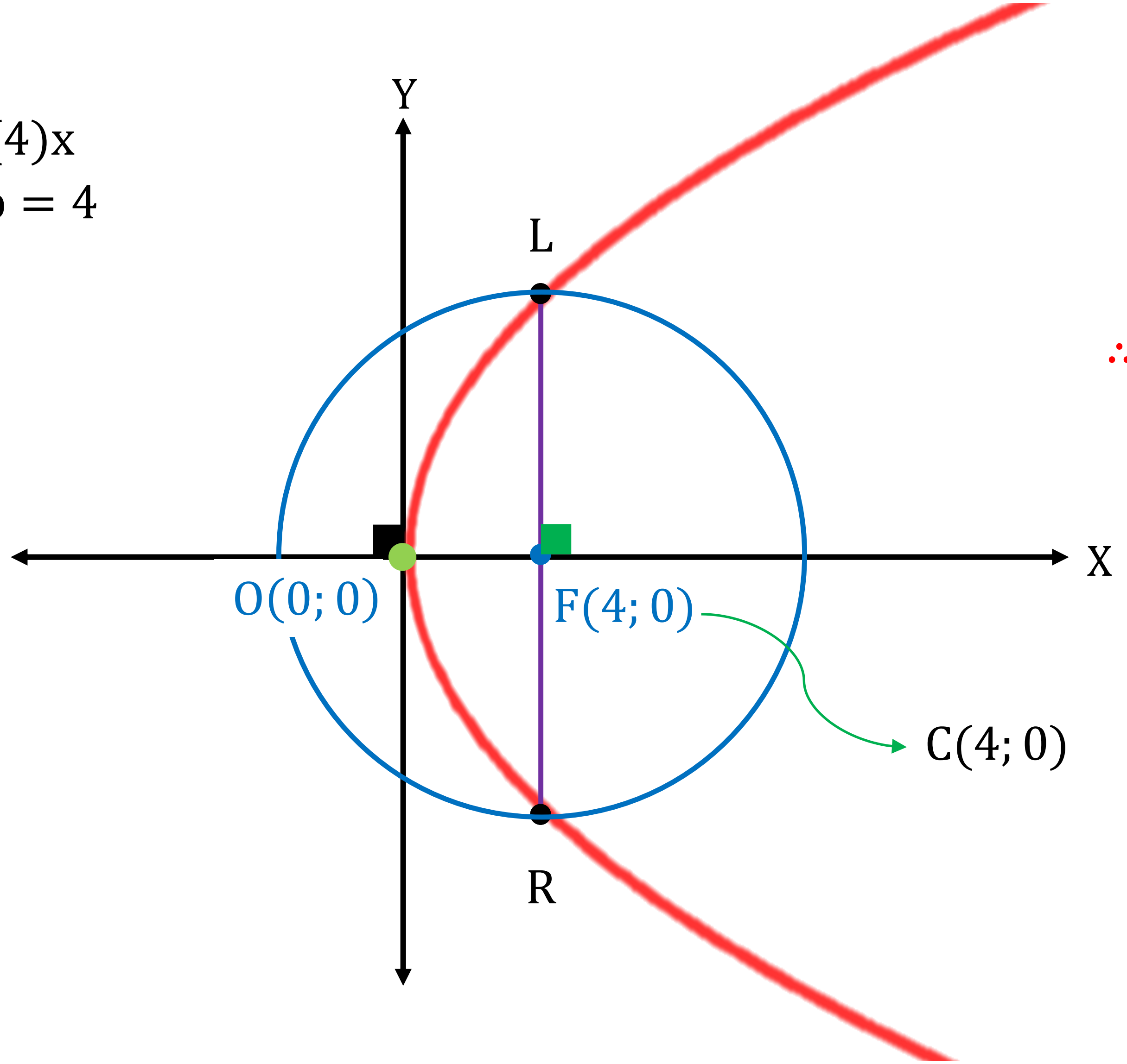
$$y^2 = 4(4)x$$

$$V(0;0) \quad \wedge \quad p = 4$$

$$2r = LR$$

$$2r = 4|4|$$

$$r = 8$$



$$\mathcal{C}: (x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

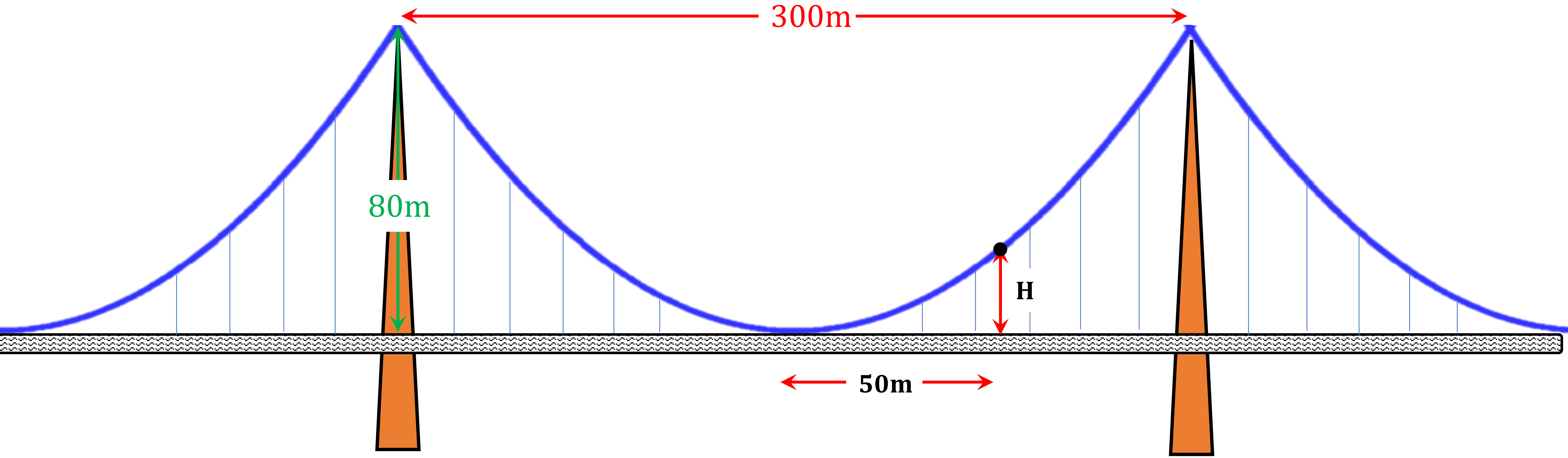
$$\mathcal{C}: (x-4)^2+(y-0)^2 = 8^2$$

$$\therefore \boldsymbol{\mathcal{C}: (x-4)^2+y^2 = 64}$$

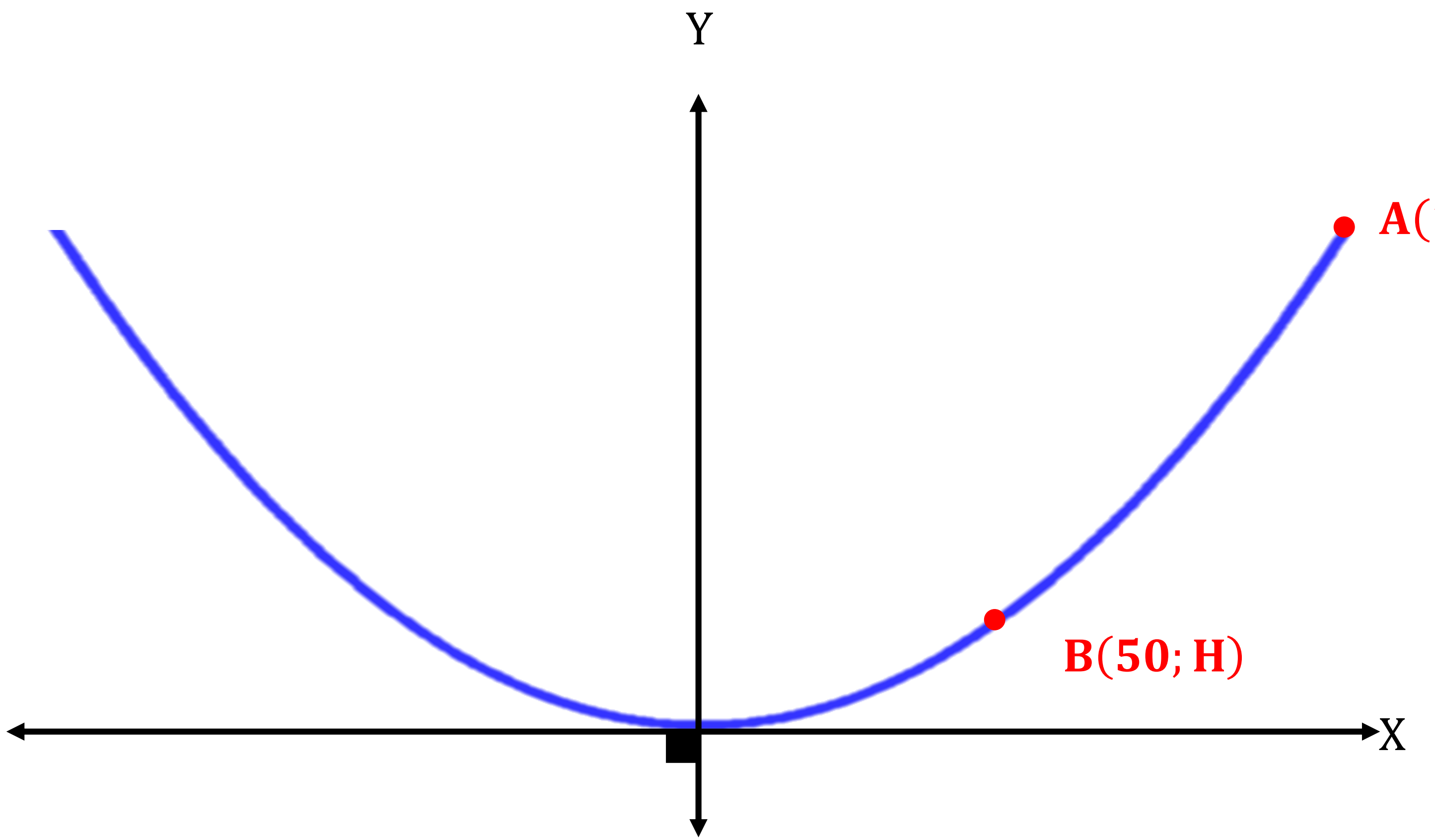
CLAVE: C

14. Las dos torres de suspensión de un puente colgante distan entre si 300 m y se extienden 80 m por encima de la calzada. Si el cable (que tiene la forma de una parábola) es tangente a la calzada en el centro del puente, determinar la altura del cable por encima de la pista a 50 m del centro del puente. (Asumir que la pista es horizontal).

Resolución:



PARÁBOLA



$$\mathcal{P}: x^2 = 4py$$

$$A \in \mathcal{P}: 150^2 = 4p(80)$$

$$B \in \mathcal{P}: \quad 50^2 = 4p(H)$$

$$(3)^2 = \frac{80}{H}$$

$$\therefore \mathbf{H} = \frac{\mathbf{80}}{\mathbf{9}}$$

CLAVE: B

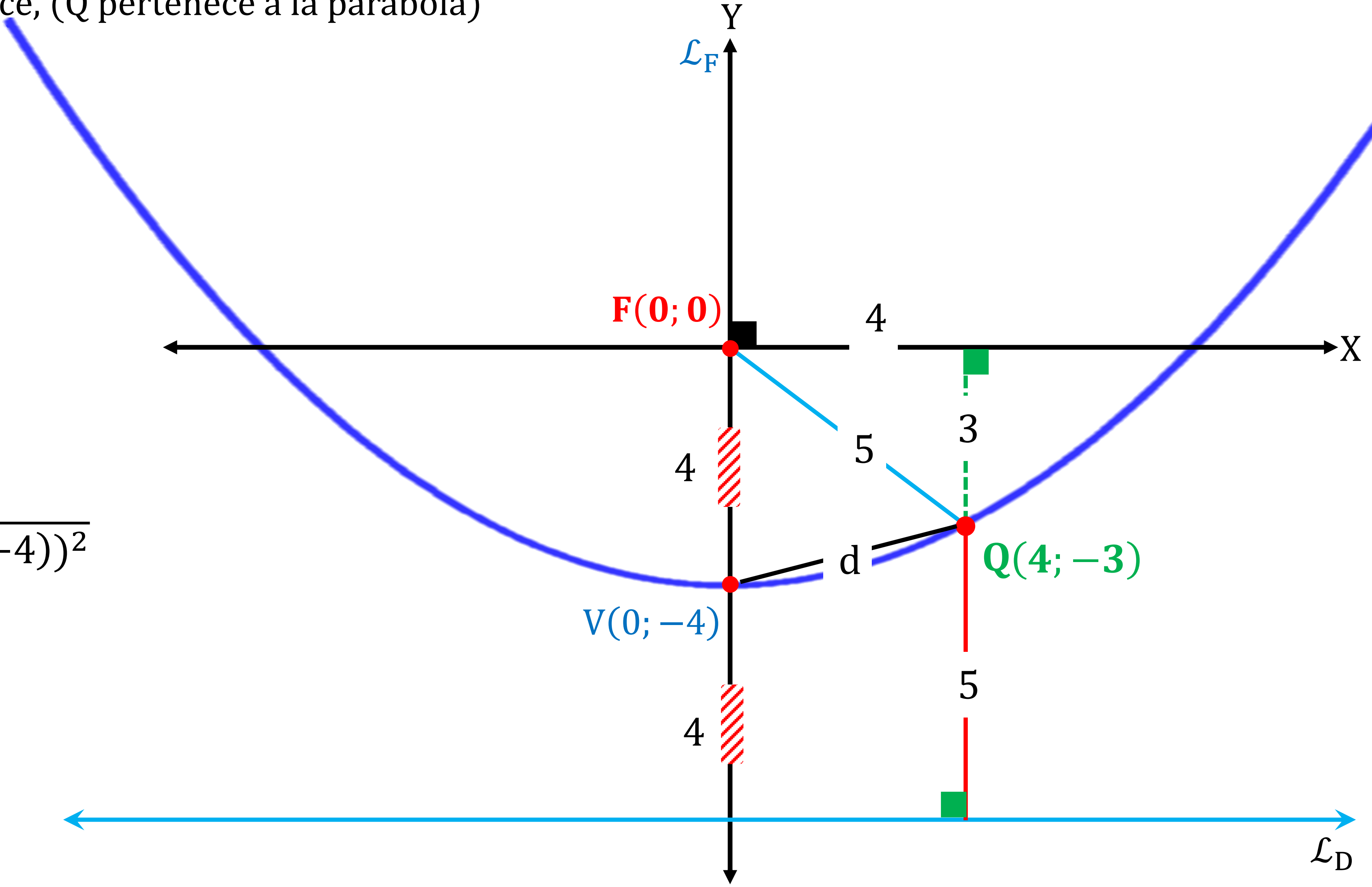
15. La distancia del punto Q al foco de una parábola cuya ecuación es: $x^2 - 16y - 64 = 0$ es 5. Calcular la distancia de Q al vértice, (Q pertenece a la parábola)

Resolución:

$$\mathcal{P}: x^2 = 16y + 64$$

$$\mathcal{P}: x^2 = 4(4)(y + 4)$$

$$V(0; -4) \quad \wedge \quad p = 4$$



$$d = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-(-4))^2}$$

$$d = \sqrt{16 + 1}$$

$$\therefore \mathbf{d = \sqrt{17}}$$

CLAVE: B

PARÁBOLA

16. Dada la parábola: $P: x^2 - 12x - 4y + 44 = 0$

Determine la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola y el extremo izquierdo del lado recto.

Resolución:

$$\mathcal{P}: x^2 - 12x + 36 = 4y - 44 + 36$$

$$\mathcal{P}: (x-6)^2 = 4(1)(y-2)$$

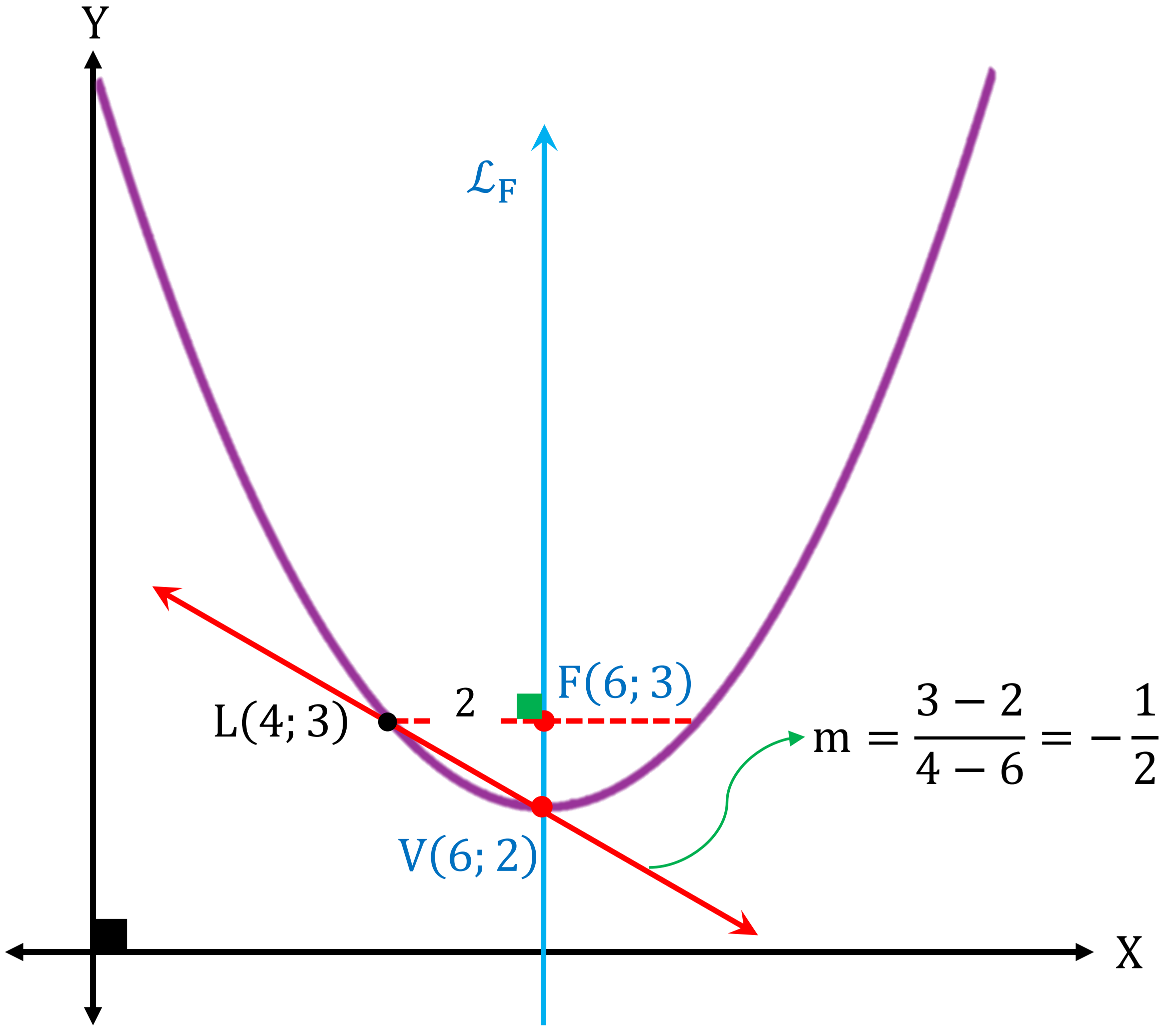
$$V(6;2) \quad \wedge \quad p = 1$$

$$\mathcal{L}: (y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$\mathcal{L}: (y - (-2)) = -\frac{1}{2}(x - (6))$$

$$\mathcal{L}: 2y + 4 = -x + 6$$

$$\therefore \mathcal{L}: \mathbf{x + 2y - 2 = 0}$$

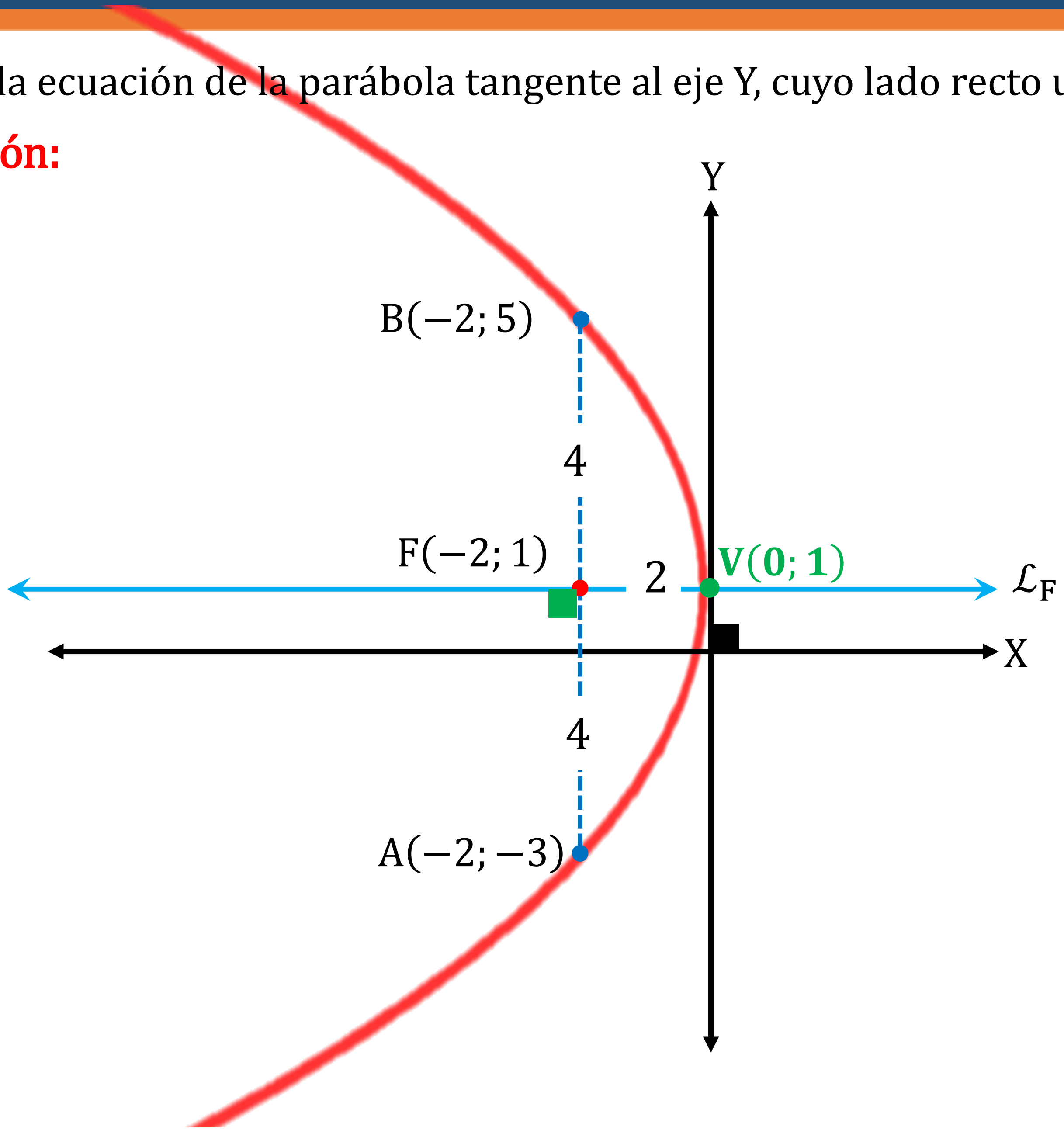


CLAVE: D

PARÁBOLA

17. Calcular la ecuación de la parábola tangente al eje Y, cuyo lado recto une los puntos A(−2;−3) y B(−2;5)

Resolución:



$$\mathcal{P}: (y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$\mathcal{P}: (y-1)^2 = 4(-2)(x-0)$$

$$\mathcal{P}: y^2 - 2y + 1 = -8x$$

$$\therefore \mathcal{P}: \mathbf{y^2 + 8x - 2y + 1 = 0}$$

CLAVE: A

18. ¿Para qué valor de "m" la recta: $mx - y + 2 = 0$ es tangente a la parábola $y^2 - 4x = 0$?

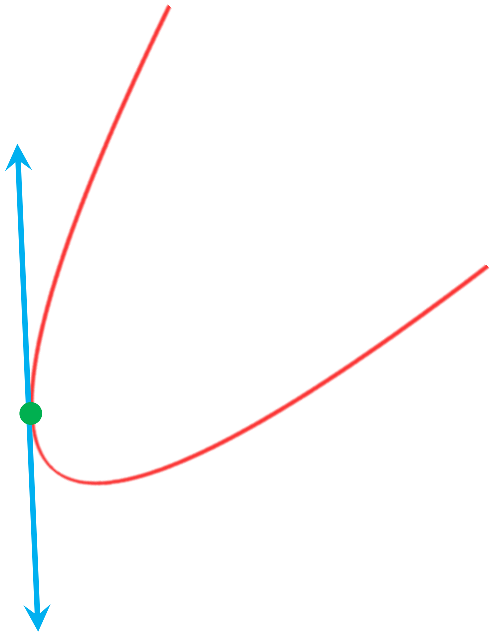
Resolución:

$$\mathcal{P}: y^2 - 4x = 0 \quad \wedge \quad \mathcal{L}: y = mx + 2$$

$$(mx + 2)^2 - 4x = 0$$

$$m^2x^2 + 4mx + 4 - 4x = 0$$

$$m^2x^2 + (4m - 4)x + 4 = 0$$



$$\Delta = 0$$

$$(4m - 4)^2 - 4m^2 . 4 = 0$$

$$\cancel{16}(m - 1)^2 - \cancel{16}m^2 = 0$$

$$\cancel{m^2} - 2m + 1 - \cancel{m^2} = 0$$

$$\therefore \mathbf{m = \frac{1}{2}}$$

CLAVE: D

19. Los puntos intersección de la recta: $x - y - 4 = 0$ Y la parábola $y^2 - 2x = 0$,son:

Resolución:

$$\mathcal{L}: y = x - 4 \quad \wedge \quad \mathcal{P}: y^2 = 2x$$

$$(x - 4)^2 = 2x$$

$$x^2 - 8x + 16 = 2x$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x \quad -8 \rightarrow x = 8 \quad \rightarrow y = (8) - 4 \rightarrow y = 4$$

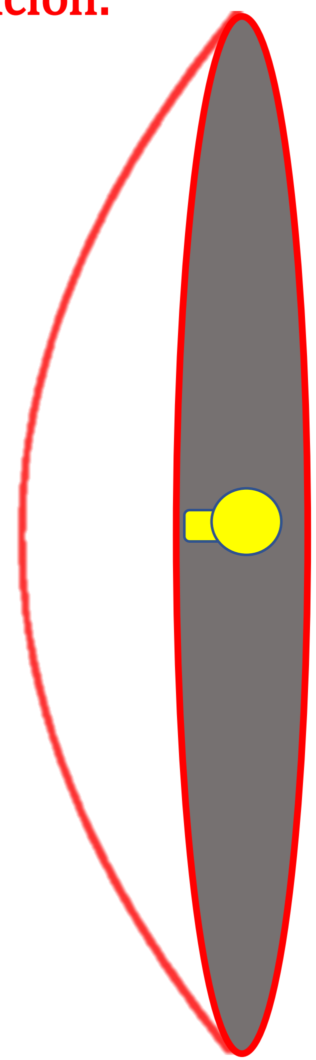
$$x \quad -2 \rightarrow x = 2 \quad \rightarrow y = (2) - 4 \rightarrow y = -2$$

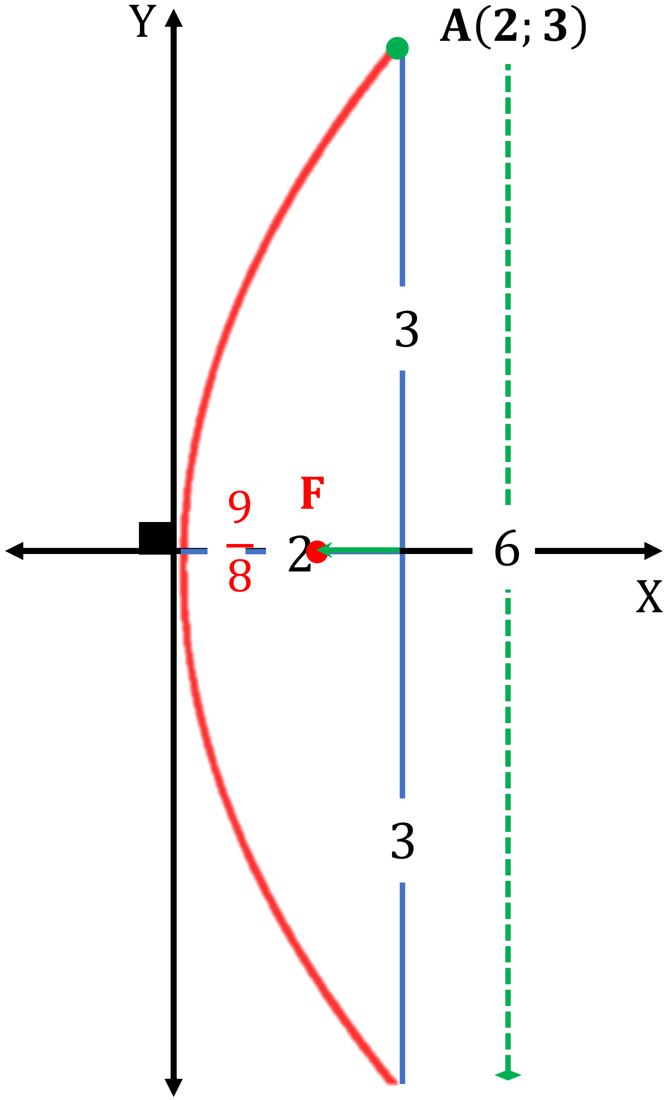
$$\therefore \mathbf{A(8;4)} \ \ \mathbf{y} \ \ \mathbf{B(2;-2)}$$

CLAVE: B

20. Una antena de TV tiene forma de paraboloide de revolución. Si la antena mide 6 pies de diámetro en su abertura y 2 pies de profundidad, ¿a qué profundidad se encuentra el receptor que está colocado en el foco?

Resolución:





$$\mathcal{P}: y^2 = 4px$$

$$\mathcal{P}: 3^2 = 4p(2)$$

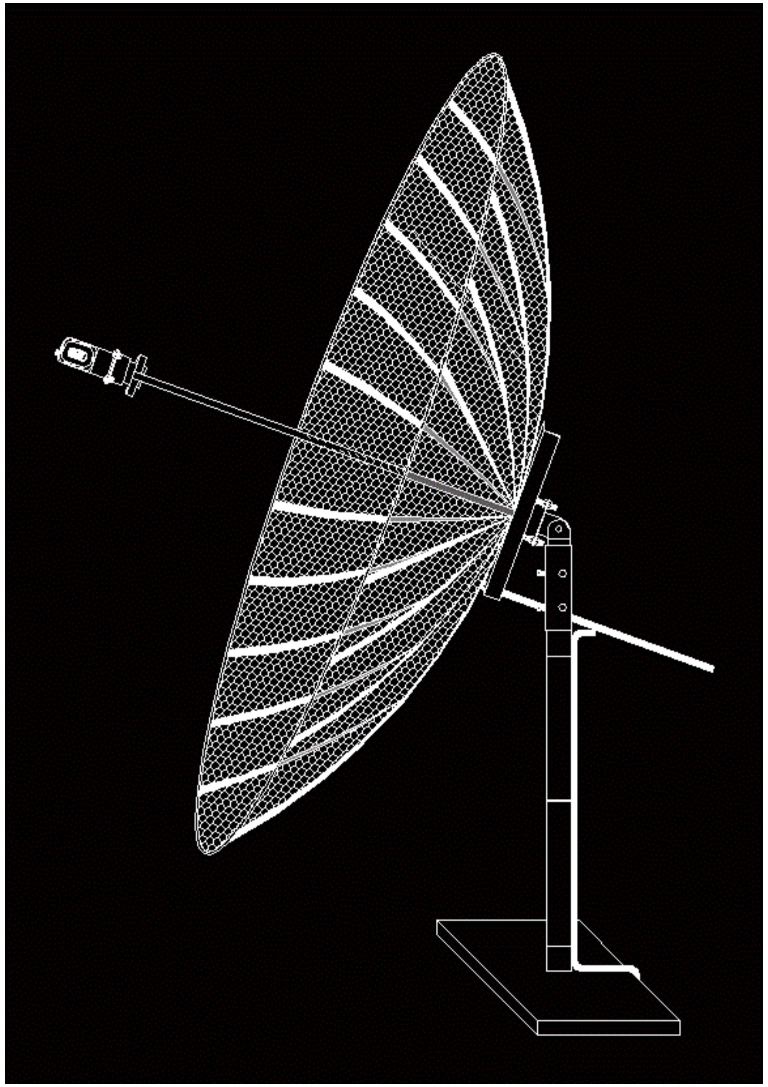
$$p = \frac{9}{8}$$

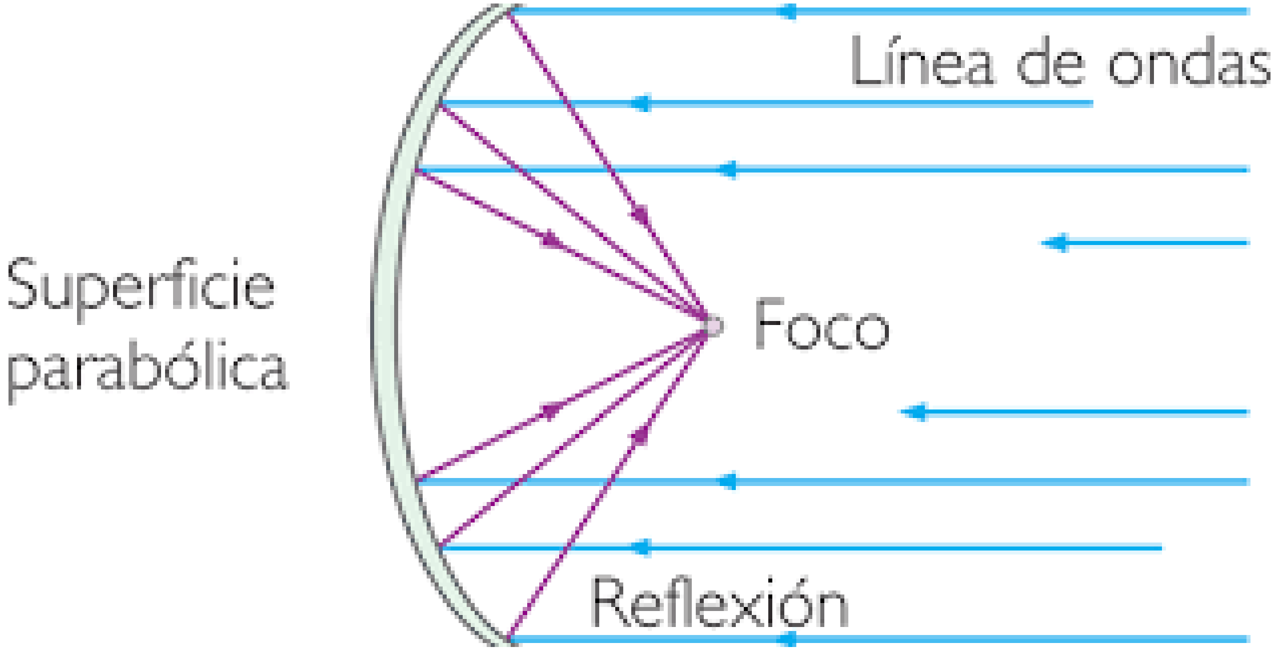
$$\text{Profundidad} = 2 - \frac{9}{8}$$

$$\therefore \frac{7}{8}$$

CLAVE: D

PARÁBOLA





MOMENTO DE PRACTICAR

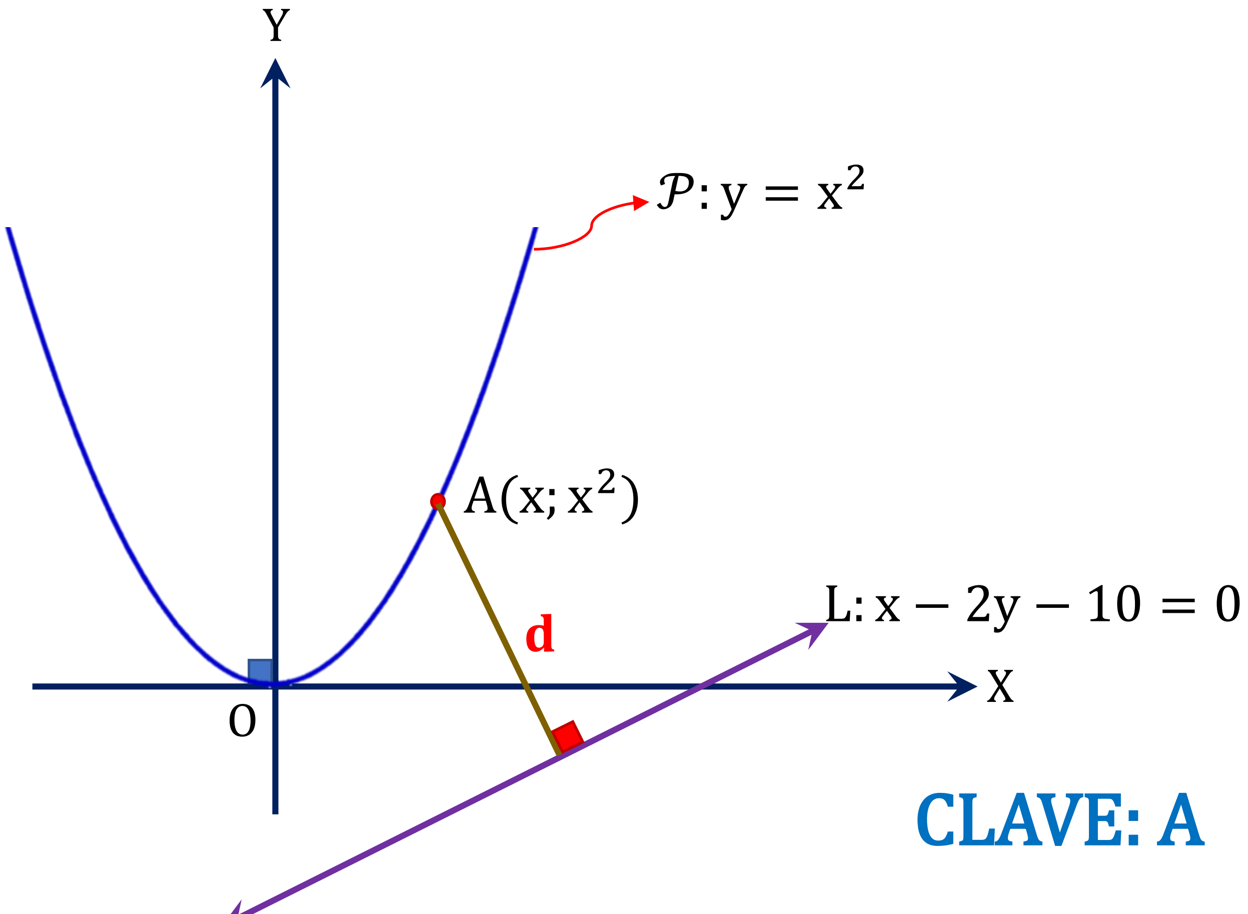
EXAMENES DE ADMISIÓN

UNI 2015 – II

Dada la parábola $\mathcal{P}: y = x^2$ y la recta $L: x - 2y = 10$, halle la distancia (distancia mínima) entre ellas.

A) $\frac{79\sqrt{5}}{40}$ B) $\frac{80\sqrt{5}}{39}$ C) $\frac{79\sqrt{5}}{39}$ D) $\frac{81\sqrt{5}}{39}$ E) $\frac{81\sqrt{5}}{40}$

Resolución:



Por distancia de un punto a la recta:

$$d = \frac{|x + (-2)x^2 + (-10)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{|2x^2 + x - 10|}{\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{\left|2\cancel{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{79}{8}\right|}{\sqrt{5}}$$

Para que la distancia sea minima $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 0$

$$d = \frac{\frac{79}{8}}{\sqrt{5}} \qquad d = \frac{79}{8\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \qquad \therefore\ \mathbf{d_{mín}} = \frac{\mathbf{79\sqrt{5}}}{\mathbf{40}}$$

CLAVE: A

CIRCUNFERENCIA

UNI 2011 – II

¿Cual es la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre la recta $y + x = 0$. Además, pasa por los puntos (3;4) y $(3\sqrt{2}; \sqrt{7})$?

A) $x^2 + y^2 = 5$ B) $x^2 + y^2 = 9$ C) $x^2 + y^2 = 15$ D) $x^2 + y^2 = 16$ E) $x^2 + y^2 = 25$

Resolución:

Ecuación de la circunferencia:

$$\mathcal{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Por dato:

I. Centro$(h;k) \in y + x = 0 \longrightarrow k + h = 0$

$$k = -h$$

$$\mathcal{C}: (x-h)^2 + (y+h)^2 = r^2$$

II. $(3;4) \wedge (3\sqrt{2}; \sqrt{7}) \in \mathcal{C}: (x-h)^2 + (y+h)^2 = r^2$

$$\left.\begin{aligned}(3-h)^2 + (4+h)^2 &= r^2 \\ (3\sqrt{2}-h)^2 + (\sqrt{7}+h)^2 &= r^2\end{aligned}\right\} =$$

$$(3-h)^2 + (4+h)^2 = (3\sqrt{2}-h)^2 + (\sqrt{7}+h)^2$$

$$9 - 6h + \cancel{h^2} + 16 + 8h + \cancel{h^2} = 18 - 6\sqrt{2}h + \cancel{h^2} + 7 + 2\sqrt{7}h + \cancel{h^2}$$

$$\cancel{25} + 2h = \cancel{25} + 2h(\sqrt{7} - 3\sqrt{2})$$

$$h = 0 \quad \text{entonces: } k = 0$$

Reemplazando en la ecuacion de la circunferencia:

$$\mathcal{C}: (x-0)^2 + (y+0)^2 = r^2$$

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 = r^2$$

Como$(3;4) \in \mathcal{C}$

$$3^2 + 4^2 = r^2 \longrightarrow r = 5$$

$$\therefore \mathcal{C}: \mathbf{x^2 + y^2 = 25}$$

CLAVE: E

UNI 2009 – II

Si un diámetro de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ tiene como extremos a los puntos (2;2) y (6;5), entonces $\left(h+k+\frac{r^2}{2}\right)$ es igual a

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Resolución:

El centro (h;k) es el punto medio de (2;2) y (6;5)

$$(h;k)=\frac{(2;2)+(6;5)}{2}\longrightarrow(h;k)=\frac{(8;7)}{2}\longrightarrow(h;k)=\left(4;\ \frac{7}{2}\right)\longrightarrow h=4\wedge k=\frac{7}{2}$$

El diámetro de la circunferencia es la distancia entre (2;2) y (6;5)

$$2r=\sqrt{(6-2)^2+(5-2)^2}\longrightarrow 2r=\sqrt{16+9}\longrightarrow r=\frac{5}{2}$$

Reemplazamos en lo pedido:

$$\left(h+k+\frac{r^2}{2}\right)=\left(4+\frac{7}{2}+\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}\right)\qquad\left(h+k+\frac{r^2}{2}\right)=\left(\frac{15}{2}+\frac{25}{4}\right)\qquad\therefore\left(\mathbf{h+k+\frac{r^2}{2}}\right)=\mathbf{8}$$

CLAVE: B

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS